II Logische Beweisverfahren.

Im ersten Teil dieses Kurses haben wir verschiedene logische Kunstsprachen eingeführt - die Aussagenlogik, die monadische Prädikatenlogik, die polyadische Prädikatenlogik ohne Identität Funktionskonstanten und die polyadische Prädikatenlogik mit und/oder Funktionskonstanten). Für jeden dieser Sprachen ha eine Syntax definiert, die bestimmt, welche Symbolreihen wohl Ausdrücke der Sprache sind, und wie diese schrittweise aus kle Konstituenten aufgebaut sind. Ebenfalls wurde, aufbauend auf Syntax der verschiedenen Sprachen L, jeweis eine modelltheore Semantik entwickelt. Diese spezifiziert eine Klasse von Modellen und definiert für ein jedes solches Modell M, welche Sätze von L wahr sind und welche falsch. Damit ergeben sich für jeden Satz die Wahrheitsbedingungen von A, die jedem Modell M für L den "w(ahr)" bzw. "f(alsch)" zuordnen, abhängig davon, ob A in M wa oder nicht. Auf dieser semantischen Basis wurde dann die Gülti Argumenten definiert: Ein Argument $A_1, \ldots, A_n \models B$, mit Prämisse $A_1, \ldots, A_n$ und Schluß B, ist gültig, wenn das Wahr Sein der Präm eine Garantie bildet für das Wahr Sein des Schlußes: In jedem M dem $A_1, \ldots, A_n$ wahr sind, ist auch B wahr.

Noch kaum berücksichtigt haben wir bis jetzt die Frage, wie fest werden kann, ob ein Satz B in der Tat aus Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ fo Und noch überhaupt nicht erörtert wurde die Frage, wie man e Schluß B aus den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ ableiten könnte. Diese Fra werden uns in diesem Teil des Kurses beschäftigen.

A. Semantische Tableaus.

1. Aussagenkalkül

Für die Aussagenlogik sind wir einem Beweisverfahren - einem Verfahren, das in endlich vielen Schritten feststellt, ob der Satz aus den Prämissensätzen $A_1, \ldots, A_n$ folgt - schon begegnet. Denn Methode der Wahrheitstafeln ist ja ein solches Verfahren: Inde alle Kombinationen von Wahrheitswerten für die in Prämissen Schluß vorkommenden Atome betrachtet und für jede dieser Kombinationen die entsprechenden Wahrheitswerte für $A_1, \ldots,$ A berechnet, läßt sich immer entscheiden, ob B in der Tat aus $A_1,$ folgt. Ist der Wert von B "wahr" für jede Kombination, die allen

Prämissen A_1, ..., A_n den Wert "wahr" zuordnet, so folgt B aus A_1
und wenn nicht, dann folgt B nicht aus diesen Prämissen.

Man kann dieses Verfahren auch so beschreiben: Man führt ei systematische Suche nach einem Gegenbeispiel für die mutmaßl Folgerungsbeziehung zwischen A_1, ..., A_n und B durch - die Such einer möglichen Kombination von Wahrheitswerten für die ato Teilsätze von A_1, ..., A_n und B, die die Prämissen verifiziert und Schluß falsifiziert. Hat die Suche Erfolg, so bedeutet dies, daß di Folgerungsbeziehung zwischen A_1, ..., A_n und B nicht gilt. Hat si Erfolg, so legt dies nahe, daß der Schluß gültig ist; unter gewisse Umständen zeigt der Versuch, ein Gegenbeispiel zu finden, eind dass es kein Gegenspiel geben kann. In solchen Fällen können v schließen, daß B logisch aus A_1, ..., A_n folgt.

Das Wahrheitstafelverfahren erlaubt diesen Schluß in allen Fälle sich kein Gegenbeispiel konstruieren läßt. Wenn wir für jede d möglichen Wahrheitswert-kombinationen für die Atome, die in Prämissen und Schluß vorkommen, die Wahrheitswerte von Pr und Schluß ausrechnen, dann wird sich entwder eine Kombinat finden, die alle Prämissen wahr und den Schluß falsch macht - i Fall haben wir ein Gegenbeispiel - oder sonst gilt für jede Komb daß sie entweder den Schluß verifiziert oder eine der Prämisse falsifiziert; und damit ist dann nachgewiesen, daß es kein Gege gibt. Das Verfahren kommt also immer nach einer endlichen An Berechnungs-schritten zu einem Ergebnis und deshalb ist es ein Entscheidungsverfahren: Jede mögliche Frage von der Form: "Is Argument $A_1, \ldots, A_n \vDash B$ gültig?" beantwortet das Verfahren nacl endlich vielen Schritten entweder mit "ja" oder mit "nein".

Auch für die Prädikatenlogik gibt es Beweisverfahren, die in der sind, für jedes gültige Argument $A_1, \ldots, A_n \vDash B$ einen Gültigkeitsl zu liefern. Beweisverfahren für die polyadische Prädikatenlogik aber nie Entscheidungsverfahren. (Für die monadische Prädika in der wir es ausschließlich mit einstelligen Prädikaten und Individuenkonstantent zu tun haben, gibt es dagegen Entscheidungsverfahren.) Der Umstand, daß es vollständige Beweisverfahren für den (polyadischen) Prädikatenkalkül gibt Heißt Verfahren, die für jedes gültige Argument einen Beweis im bereitstellen), die aber keine Entscheidungsverfahren sind, mag ersten Blick befremden. Daß diese Möglichkeit - vollständig und dennoch kein Entscheidungsverfahren - besteht, hat folgenden Wie lang ein Beweis der Gültigkeit eines beliebig gewählten Arg sein wird, läßt sich (prinzipiell) nicht voraussagen. Weiß man a von vornherein, ob das Argument gültig ist, dann bleibt einem besseres übrig, als zu versuchen, mit Hilfe des Verfahrens einen zu finden. Gelingt dies, so hat man damit die Gültigkeit nachge so lanf man aber keinen Beweis gefunden hat, läßt sich im allge nichts mit Sicherheit über die Gültigkeit des Arguments sagen: könnte ungültig sein, und in dem Fall gibt es dann natürlich au Beweis; aber die Möglichkeit, daß das Argument gültig ist undve Beweis gefunden werden könnte, wenn man die Suche nach ihm fortsetzen würde, läßt sich ebenfalls nicht ausschließen.

Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik ist nicht nur eines tifsten und Grundlegendsten Ergebnisse der formalen Logik und Mathematik, sondern der westlichen Kultur überhaupt. In sein ist es den bahnbrechenden Arbeiten aus den Jahren 1929-31 c Tschechisch-Österreichischen Logikers Kurt Gödel (1906-1981) z verdanken.

Um die logische Gültigkeit eines Arguments in der Aussagenlogik verifizieren, ist es, wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, nic immer nötig, seine Wahrheitstafel lückenlos zu erstellen. Oft ist möglich, diese Frage zu entscheiden, indem man nur eine besti Auswahl aller Bewertungen (Kombinationen von Wahrheitswert betrachtet. Hat man die Wahrheitswerte von Prämisen und Sch diese Bewertungen durchgerechnet, dann ist damit die Antwort Gültigkeitsfrage schon gegeben. Zur Illustration betrachten wir das schon früher diskutierte Argument (1):

(1) $\neg(p \,\&\, (q \vee r)),\ (q \,\&\, r) \rightarrow (p \,\&\, r) \models \neg(r \,\&\, q)$

Frage: Ist dieses Argument logisch gültig?

Diese Frage läßt sich folgendermaßen beantworten: Wäre das A (1) nicht gültig, so müßte es eine Bewertung geben, die den Schl $\neg(r \,\&\, q)$ falsifiziert. Dazu muß r & q wahr sein, was bedeutet, d sowohl r als auch q wahr sein müssen. Damit sind die Möglichk eines eventuellen Gegenbeispiels schon auf zwei reduziert : q ur wahr und weiterhin entweder p wahr oder p falsch. Ist p falsch auch p & r falsch, während aufgrund der schon gemachten Anr & r wahr sein muß. Damit ist dann aber die zweite Prämisse fal bekommmen wir auf diese Weise kein Gegenbeispiel. Wenn abe wahr ist, so ist auch p & (q v r) wahr, und daher (p & (q v r)) f Also ergibt sich auch auf diesem Weg kein Gegenbeispiel. Es gibt

keine Bewertung, die die Prämissen verifiziert und gleichzeitig d
Schluß falsifiziert. Also ist das Argument gültig.

Die Idee der gerade beschriebenen Überlegung war diese: Die
Bedingungen, die ein Gegenbeispiel für das Argument erfüllen so
die Prämissen sollen wahr sein und der Schluß falsch - werden
schrittweise auf entsprechende Bedingungen für ihre Teilforme
reduziert, bis man zuletzt solche Bedingungen für die atomaren
Teilformeln erreicht hat. In dem Fall, wo es ein Gegenbeispiel gi
werden diese Bedingungen eines hergeben; im anderen Fall, in d
keine Gegenbeispiele gibt, wird dies, wie im gerade diskutierten
unmittelbar ersichtlich sein, wie sich die Bedingungen eindeutig
widersprechen.

Wenn wir diese Idee systematisch ausarbeiten, ergibt sich eine
zur Prüfung der Gültigkeit von Argumenten, die meistens sehr v
schneller zum Ziel führt als die umständliche Methode der
Wahrheitstafeln. Diese Methode wurde in den späten fünfziger
fast gleichzeitig von dem niederländischen Logiker E.W Beth und
etwas anderer Form) von dem finnischen Logiker und Philosoph
Hintikka entwickelt. Sie ist jetzt allgemein als die Methode der
Semantischen Tableaus bekannt. Wie die Methode genau funkti
läßt sich am Besten anhand einiger Beispiele zeigen. Als erstes B
betrachten wir nochmal das Argument (1), auf das wir jetzt die
Tableaumethode anwenden.

Als erster Schritt in der Konstruktion des Semantischen Tableau
führen wir zwei Spalten ein - eine Spalte für "wahre" und eine f
"falsche" Formeln. Und wir tragen die Prämissen in die erste un
Schluß in die zweite Spalte ein. Die Idee, die dahinter steckt, ist
versuchen, eine Bewertung für die im Argument vorkommenden
p, q und r, zu finden, die die Formeln in der "Wahr"-Spalte wah
und die in der "Falsch"-Spalte falsch. Das Anfangstableau (2) ist
nichts weiter als eine graphische Darstellung der Frage: Gibt es e
solche Bewertung? (Wenn ja, dann ist das Argument ungültig, w
nicht, dann ist es gültig.)

(2)	WAHR	FALSCH
	$\neg(p \,\&\, (q \vee r))$	$\neg(r \,\&\, q)$
	$(q \,\&\, r) \rightarrow (p \,\&\, r)$	

Die mit den Formeln, die in (2) unter "Wahr" und "Falsch" vork
verbundenen Bedingungen - "¬(p & (q v r)) " ist "Wahr" usw. -
jetzt weiteranalysiert werden. Wir tun dies, indem wir die Forn
ihre Teile zerlegen: die Formeln werden schrittweise "reduziert".
ersten beiden Reduktionsschritte, die wir im vorliegenden Fall
durchführen, entsprechen den ersten beiden der Überlegungen,
S. 2 zu dem Schluß führten, daß (1) gültig ist. Zuerst reduzieren
Forderung, daß ¬(r & q) falsch sein soll, auf die Forderung, daß r
wahr sein soll. Dazu tragen wir die Formel r & q in die "Wahr"-
Spalte ein:

(3)	WAHR	FALSCH
	¬(p & (q v r))	¬(r & q)
	(q & r) → (p & r)	
	r & q	

Als nächster Schritt reduzieren wir die Bedingung, daß r & q wa
auf die zwei Bedingungen, daß r wahr bzw. daß q wahr ist. Dazu
wir auch diese beiden Teilformeln unter "Wahr" ein:

(4)	WAHR	FALSCH
	¬(p & (q v r))	¬(r & q)
	(q & r) → (p & r)	
	r & q	
	r	
	q	

Der dritte Schritt reduziert die Bedingung, daß ¬(p & (q v r)) w
soll, auf die Bedingung, daß p & (q v r) falsch sein soll: p & (q v
kommt in die "Falsch"-Spalte:

(5)	WAHR	FALSCH
	¬(p & (q v r))	¬(r & q)
	(q & r) → (p & r)	
	r & q	
	r	
	q	
		p & (q v r)

Jetzt wird die Prozedur etwas komplizierter, weil die einzigen n möglichen Reduktionsschritte alle zu "Alternativen" führen. Zur Beispiel ist die Forderung, daß p & (q v r) falsch ist, entweder d erfüllbar, daß p falsch ist, oder dadurch, daß q v r falsch ist. Di bedeutet, daß wir diese beiden Möglichkeiten separat untersuc müssen. Das Tableau teilt sich also in zwei Tableaus, eines mit d zusätzlichen Bedingung des Falsch Seins von p und das andere r Bedingung des Falsch Seinst von q v r. Wir stellen diese Tablea mit Hilfe einer senkrechten Trennung der beiden Spalten dar:

(6)

WAHR	FALSCH
¬(p & (q v r))	¬(r & q)
(q & r) → (p & r)	
r & q	
r	
q	
	p & (q v r)

	‖ p	| q v r

Die zwei so enstandenen Tableaus - das erste besteht aus der li "Wahr"-Spalte und der linken "Falsch"-Spalte, das zweite aus de rechten "Wahr"-Spalte und rechten "Falsch"-Spalte - werden au Tableau-Äste (des Ausgangstableaus) genannt.

Der nächste Schritt ist wiederum von der einfachen Sorte; sie fi zu einer Verzweigung. Das Falsch Sein von q v r erfordert, daß beide falsch sind. Also können wir diese beiden Formeln in die Spalte des zweiten Tableaus eintragen. Und jetzt zeigt sich, daß Tableau nicht zu einem Gegenbeispiel führen kann. Denn die a Formel q (und dasselbe gilt für r) befindet sich in diesem Table sowohl auf der linken als auf der rechten Seite. Das bedeutet, d Suche in diesem Tableau-Ast zu widersprüchlichen Anforderung geführt hat; q kann ja nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.

Wir können aufgrund dieses Befundes schließen, daß der erste Ast nicht zu einem Gegenbeispiel führt. Ein solcher Tableau-Ast man geschlossen; wir markieren ihn als solchen, indem wir sein Spalten mit einem wagerechten Doppelstrich abschließen:

```
(7)          WAHR                       FALSCH

             ¬(p & (q v r))             ¬(r & q)
             (q & r) → (p & r)
             r & q
             r
             q                      p & (q v r)
______________________________||____________________
           |            ||    p     |   q  v  r
                                        q
                                        r
          ==============          ========
```

Jetzt muß wieder eine Reduktion durchgeführt werden, die zu (Spaltung führt (und zwar eine Spaltung des noch nicht abgesch linken Tableau-Astes). Die Bedingung, daß das Konditional (q & r) → (p & r) wahr ist, ist entweder dadurch erfüllbar, daß (Antezedent falsch oder dadurch, daß der Konsequent wahr ist. zwei Tableau-Ästen, die diesen Möglichkeiten entsprechen, läßt zweite gleich mit der Regel, die wir schon auf die Konjunktion r (angewandt haben, weiter reduzieren. Da in diesem Ast p ebenf der rechten Seite vorkommt, ist auch er abgeschlossen. (8) zeig Ergebnis der beiden Schritte.

```
(8)          WAHR                       FALSCH

             ¬(p & (q v r))             ¬(r & q)
             (q & r) → (p & r)
             r & q
             r
             q
                                        p & (q v r)
                        ||
______________________________||_______________________
                |       ||    p               |   q  v  r
              |         ||                    |   q
              |         ||                    |   r
_______________ |==========|| _________________ |========
          |   p & r     ||   q & r      |
          |   p         ||              |
          |   r         ||              |
          |============= ||             |========
```

In dem ersten der gerade erzeugten Äste ist noch eine weitere
Reduktion, der Formel q & r, fällig. Diese Reduktion führt zu eir
abermaligen Verzweigung (genauso wie vorhin die Formel p & (c
Da aber sowohl q als auch r in diesem Tableau schon auf der lir
vorkommen, kommen beide so entstehende Tableau-Äste zum

```
(9)             WAHR                          FALSCH

                ¬(p & (q v r))                ¬(r & q)
                (q & r) → (p & r)
                 r & q
                 r
                 q
                                              p & (q v r)
     ___________________________________||_____________________________
                    |             ||     p         |   q  v  r
                  |             ||               |   q
                  |             ||               |   r
     ____________|============= || _____________|========
                  |   p & r     ||    q & r      |
                  |   p         ||               |
                  |   r         ||               |
     ____________|============= ||_____________ |========
            |     |             ||    q   |    r      |
     ===== |=====|             ||=====|=======|
```

Damit geht die Suche nach einem Gegenbeispiel endgültig zu End
alle Tableau-Äste, die im Laufe dieser Suche entstanden, abgesc
sind, kann es offenbar kein Gegenbeispiel geben und wir dürfer
schließen, daß das Argument gültig ist.

Bei der Konstruktion des Tableaus haben wir von Regeln Gebrau
gemacht, die ganz von den jeweiligen Hauptjunktoren der zu
reduzierenden Formeln bestimmt sind. Genauer: für jeden Junl
es zwei Regeln, die eine für die Reduktion von Formeln die diese
Junktor als Hauptjunktor haben und in der "Wahr"-Spalte vork
und die andere für solche Formeln in der "Falsch"-Spalte. Zum
haben wir für die Konjunktion "&" die zwei Regeln, die sich
folgendermaßen schematisch darstellen lassen:

WAHR FALSCH

C & D ||
C
D

WAHR FALSCH

|| C & D
C | D

Die Interpretation dieser Schemata sollte klar sein: Die Regel fü
Formeln von der Form C & D in der "Wahr"-Spalte sieht vor, daß
Konjunkte in dieser Spalte eingetragen werden. Die Regel für C &
der "Falsch"-Spalte bewirkt eine Verzweigung des Tableaus; im
der so entstehenden Äste wird das Konjunkt C in die "Falsch"-Sp
eingetragen, während im zweiten Ast das Konjunkt D unter "Fals
eingetragen wird.

Die Regeln für die anderen Junktoren lassen sich ähnlich darste

WAHR FALSCH

¬ C ||
|| C

WAHR FALSCH

|| ¬ C
C ||

WAHR FALSCH

C v D ||
C | D

WAHR FALSCH

|| C v D
C
D

WAHR FALSCH

C → D ||
| D   C |

WAHR FALSCH

|| C → D
C   D

WAHR FALSCH

C ↔ D ||
C | | C
D   D

WAHR FALSCH

|| C ↔ D
C | D   D | C

Wir betrachten jetzt ein zweites Beispiel, in dem wir, wie auch weiterhin, die Junktorenregeln ohne Kommentar anwenden. Di das Argument, für das wir ein Tableau konstruieren

$$\neg(p \vee (q \,\&\, r)), (p \,\&\, r) \rightarrow (q \,\&\, r) \models \neg(r \vee q)$$

nicht gültig.

(10)

```
            WAHR                          FALSCH


            ¬(p v (q & r))                ¬(r v q)
            (p & r) → (q & r)

               r v q
                                          p v (q& r)

                                          p
   _____________________________||________q & r________    |
                 |                ||     q    |     r
 _____________________|_______________||_______________|___              |
     r   |    q |    r    |   q     ||      |       |
           |==============|  ||    |=====|======|
```

In (10) sind die erste Prämisse und der Schluß bis auf ihre Ato reduziert worden. Es gibt in diesem Tableau immer noch zwei geschlossene Tableau-Äste. Reduktion der zweiten Prämisse unt jeden dieser beiden Äste noch einmal. Wir betrachten den link Von den zwei Tableau-Ästen, die sich aus Anwendung der →-Reg die Formel (p & r) → (q & r) ergeben, schließt sich der zweite, w die Konjunktion auf der linken Seite weiter reduziert. Aber die Konjunktion auf der rechten Seite im ersten Ast führt abermals Teilung. Von den so entstandenen Tableau-Ästen ist wieder ei geschlossen, aber der andere schließt sich nicht; und da wir un jetzt verschossen haben - es gibt keine reduzierbare Formeln m bleibt dieser Tableau-Ast offen. Das Ergebnis ist in (11) abgebil

```
(11)      WAHR                                      FALSCH

          ¬(p v (q & r))                            ¬(r v q)
          (p & r) → (q & r)
               r v q
                                                    p v (q& r)

                                                    p
     ______________________________________________q & r___________   .
                                      ||              q        |      r
_______________________________________   _______||_________|______ .
      r              |  q   |   r   |  q  ||            |       |   |
_______________     |=======  |=====||=|___________    |============|
         |  q & r|                    || p & r   |      |
         | q     |                    ||         |      |
         |  r    |                    ||         |      |
______ ========                       || ______  |======|
   |    |                             ||  p | r  |
  ==== |                              ||   |===|
```

Da in dem betreffenden Tableau-Ast alle Formeln bis auf ihre a
Konstituenten reduziert sind und sich keine Inkonsistenz ergeb
dürfen wir schließen, daß ein Gegenbeispiel exisitert. Dieses
Gegenbeispiel - die Kombination von Wahrheitwerten der Atome
und r, die die Prämissen wahr und den Schluß falsch machen -
direkt aus dem Ast ablesen: Im Ast kommt r unter "Wahr" vor,
während p und q beide unter "Falsch" vorkommen. Die entspr
Bewertung der Atome von (1) - p falsch, q falsch, r wahr - wird
alle Formeln auf der "Wahr"-Seite im Ast verifizieren und alle F
auf der "Falsch"-Seite falsifizieren. Insbesondere sind die Präm
unter dieser Bewertung wahr und der Schluß falsch. (Daß dies i
so ist, läßt sich leicht mittels einer direkten Bwerchnung verifiz

Indem wir alle nicht-atomaren Formeln im linken Ast reduziert
dort keinen Widerspruch gefunden (d.h. keinen Abschluß errei
haben, haben wir ein Gegenspiel gefunden. Es ist also nicht nöti
den zweiten noch offenen Tableau-Ast von (10) weiterzuverfolg
indem man die dort noch verbleibenden nicht-atomaren Forme
reduziert. Tun wir dies dennoch, so zeigt sich, daß auch hier di
Reduktion des Konditionals zu einer Verzweigung in zwei Äste f
von denen wiederum einer geschlossen ist, während der andere
nochmal in zwei Äste teilt, die beide offen bleiben. Beide Äste

bestimmen dasselbe, schon gefundene Gegenbeispiel: p falsch, r beide wahr.

Die Tableau-Methode für den Aussagenkalkül haben wir jetzt vollständig beschrieben. Es sollte intuitiv klar sein, daß die systematische Anwendung der Junktorenregeln immer in endlic Schritten entweder zu einem Gegenbeispiel für ein Argument zu $A_n \models B$ führt, oder sonst zu einem Tableau in dem alle Äste abgeschlossen sind, und das somit den Nachweis liefert, daß es Gegenbeispiele gibt. Also ist die Methode ein Entscheidungsverf Finden wir kein Gegenbeispiel, so ist das Argument gültig, finden eines, dann ist es ungültig. Diese Behauptung - die Tableaumetl ein Entscheidungsverfahren für Gültigkeit aussagenlogischer A - kann formal bewiesen werden. Für den Beweis verweisen wir Literatur. (e.g. E. W. Beth, Formal Methods, Reidel, 1961.)

2. Prädikatenkalkül

Auch für die Prädikatenlogik gibt es eine Tableau-Methode. Sie sich dadurch, daß wir die schon eingeführten Junktorenregeln weitere Reduktionsregeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$ ergänzen. Wiederum demonstrieren wir die Methode zuerst anhand einig Beispiele.

Das erste Beispiel betrifft ein uns schon bekanntes Argument, w besagt, daß von den beiden Skopuslesarten von Sätzen wie "Alle Studenten arbeiten an einem Rechner." die Lesart, nach der der Existenzquantor weiten Skopus hat, die andere Lesart, die dem Quantor weiten Skopus zuweist, logisch impliziert:

(12) $(\exists y)(Q(y) \; \& \; (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))) \vdash$
$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \; \& \; R(x, y)))$

Wie immer fangen wir mit einem Tableau an, in dem die Prämis "Wahr" und der Schluß unter "Falsch" eingetragen ist.

(13)

WAHR	FALSCH
$(\exists y)(Q(y) \; \& \; (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \; \& \; R(x, y$

Da beide Formeln in (13) mit einem Quantor beginnen, helfen d Junktorenregeln, die wir bis jetzt diskutiert haben, uns nicht w Wir brauchen Reduktionsregeln für Quantoren. Ob wir die link die rechte Formel zuerst reduzieren, ist in dem vorliegenden Fa Befassen wir uns zuerst mit der linken Formel.

Die Reduktionsregel für Formeln dieses Typs - der Typ einer mit Quantor beginnenden Formel in der "Wahr"-Spalte - läßt sich folgendermaßen begründen. Damit der Satz
$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$ wahr ist, muß die Formel
$Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))$ von irgendeinem Objekt a erfüllt sein. können diese Bedingung auch so ausdrücken: irgendeine Instan Formel - eine Formel, also, von der Form "$Q(c) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,$ der die existentiell gebundene Variable y durch eine "beliebige" Individuenkonstante c ersetzt ist - muß wahr sein. (c ist dabei Bezeichnung des beliebigen Objekts a zu verstehen.) Um sicher daß die Konstante "unbelastet" ist, d.h. daß sie nicht schon vorh Bezeichnung eines Objekts in das Tableau eingeführt wurde, wä bei der Reduktion einer in der "Wahr"-Spalte stehenden Existen immer eine neue Individuenkonstante, d.h. eine Konstante, die noch nicht im Tableau vorkam.

In der Literatur zum Thema "Semantische Tableaus" werden die Individuenkonstanten, die bei der Reduktion von qunatifizierte Formeln in das Tableau eingeführt werden, oft "Parameter" gen Wir übernehmen diese Terminologie. Als Parametersymbole we meistens die Buchstaben "a", "b", "c", ... statt der bisher üblichen Individuenkonstanten "c", "c_1", .., "c_i", ... verwenden.

Die Anwendung der oben beschriebenen Regel auf die linke For (13) führt zu

(14) WAHR	FALSCH
$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y$
$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	

Der nächste Schritt ist von einem uns schon bekannten Typ: Wi reduzieren die gerade unter "Wahr" entstandene Konjunktion

$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$:

(15)	WAHR	FALSCH
	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y$
	$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	
	$Q(a)$	
	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	

Wir könnten jetzt mit der all-quantifizierten Formel auf der lin weitermachen. Wie sich aber herausstellt, ist es in diesem Fall effizienter, zuerst die Formel auf der rechten Seite zu reduzieren Formel, eine all-quantifizierte Formel in der Spalte "Falsch", stel ähnlichen Fall dar wie die Existenzformel unter "Wahr", die wir ersten Tableauschritt reduziert haben. Damit eine all-quantifiz Formel falsch ist, muß es irgendein Objekt geben, das die Formel falsifiziert; d.h. irgendeine Instanz der Formel - irgendeine Form die wir bekommen, indem der wir den All-Quantor tilgen und d ihm gebundene Variable durch eine Konstante ersetzen - muß f sein. Wiederum wissen wir über das falsifizierende Objekt weit nichts, und deshalb sollten wir für die Substitution eine bisher nicht im Tableau vorkommende Konstante verwenden.

Die in diesem Fall anzuwendende Regel ist also mit der für Exist formeln unter "Wahr" völlig symmetrisch (genauso wie die Rege Formeln von der Form "A & B" unter "Falsch" ein symmetrisches Gegenstück der Regel für "A v B" unter "Wahr" ist). Wenden wir Regel an, indem wir b als neuen "Parameter" für die all-quantif Variable x einsetzen, so ergibt sich:

(16)	WAHR	FALSCH
	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y$
	$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	
	$Q(a)$	
	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$

Der jetzt naheliegende Schritt - Reduktion des gerade entstand
Konditionals - ist wiederum ein uns schon bekannter:

(17) WAHR	|| FALSCH
$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y$
$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	
$Q(a)$	
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$
$P(b)$	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$

Als darauffolgender Schritt bietet sich jetzt die Reduktion der Existenzformel auf der rechten Seite an. (Wir könnten an diese genauso gut mit der All-Formel auf der linken Seite weitermach Damit die Formel $(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$ falsch ist, soll sie von keine Objekt erfüllt, also von allen Objekten falsifiziert werden. Das b daß jede Instanz $Q(c) \,\&\, R(b, c)$ der Formel falsch sein muß. Mit Worten, die Bedingung, daß $(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$ falsch ist, erlaub die "Falsch"-Spalte um beliebige Instanzen von ihr zu erweitern. Insbesondere sind wir berechtigt, Instanzen einzutragen, in de die Variable y eine schon vorher im Tableau verwendete Konst eingesetzt wird. Zum Beispiel können wir y durch den schon eingeführten Parameter a ersetzen. Tun wir dies, dann ergibt s (17) das neue Tableau (18):

(18) WAHR	|| FALSCH
$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y$
$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	
$Q(a)$	
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$
$P(b)$	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$
	$Q(a) \,\&\, R(b, a)$

Die jetzt durchzuführende Reduktion der neu entstandenen Ko
auf der rechten Seite von (18), führt, wie wir schon im Abschni

den Aussagenkalkül gesehen haben, zu einer Verzweigung. Der der beiden dabei entstehenden Äste schließt sich gleich, da die Q(a) hier sowohl unter "Falsch" als auch unter "Wahr" vorkomm

(19) WAHR || FALSCH

$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$ $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y$

$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$

$Q(a)$

$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$ $P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$

$P(b)$ $(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$

$Q(a) \,\&\, R(b, a)$

| |

| $Q(a)$ $R(b, a)$

=============| ||==================|

Der rechte Ast muß aber weiter untersucht werden. In diesem es immer noch eine bisher nicht reduzierte Formel, die all-qua Formel $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$ in der Spalte "Wahr". Diese stellt ein ähnlichen Fall dar wie die Existenzformel $(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$ in "Falsch"-Spalte, die wir schon reduziert haben: Damit $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$ wahr ist, muß jede ihrer Instanzen wahr sein dürfen wir unter "Wahr" beliebige solche Instanzen eintragen, solche, die entstehen, wenn wir die quantifizierte Variable durc schon im Tableu vorkommende Konstante ersetzen. Demnach wir insbesondere den Parameter b für die Variable x in $P(x) \rightarrow$ einsetzen. Das Resultat ist (20)

```
(20)          WAHR          ||              FALSCH

 (∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) →  R(x, y)))     (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y

   Q(a) & (∀x)(P(x) →  R(x, a))
     Q(a)
   (∀x)(P(x) →  R(x, a))              P(b) →  (∃y)(Q(y) & R(b, y))
     P(b)                             (∃y)(Q(y) & R(b, y))

                                        Q(a) & R(b, a)

              |                                 |
              |                                 |
              |                         Q(a)    |    R(b, a)
============= |              ||=================|
                  P(b) →        ||
                  R(b, a))      ||
```

Reduktion des Konditionals in (20) führt nochmals zu einer Spa
Wir bekommen (21)

```
(21)          WAHR          |               FALSCH

 (∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) →  R(x, y)))     (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y

   Q(a) & (∀x)(P(x) →  R(x, a))
     Q(a)
   (∀x)(P(x) →  R(x, a))              P(b) →  (∃y)(Q(y) & R(b, y))
     P(b)                             (∃y)(Q(y) & R(b, y))

                                        Q(a) & R(b, a)

              |                                 |
              |                                 |
              |                         Q(a)    |    R(b, a)
============= |              ||=================|
                  P(b) →        ||
                  R(b, a))      ||

             |        |  R(b,a)                 |   P(b)   |
             ========|======== ||               |=======|=======
```

Da in dem ersten der so entstandenen Äste die Formel P(b) scho vorkommt und wir im zweiten Ast die Formel R(a,b) schon recht schließen beide Äste; und damit ist das Tableau insgesamt gescl Also haben alle Versuche, ein Gegenbeispiel z konstruieren, zum Mißerfolg geführt und folglich ist das Argument (12), für das di Tableau konstruiert wurde, gültig.

Wenn wir Prämisse und Schluß in (12) austauschen, dann beko wir ein Argument, das bekanntlich ungültig ist:

(22) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y))) \vdash$
$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$

Die Tableaumethode sollte also in diesem Fall nicht zu einem geschlossenen Tableau führen.

Wir führen die Tablleaukonstruktion auch diesmal Schritt für S durch.

(23) WAHR || FALSCH

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y)))$ $(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$

Wir fangen wiederum mit der Formel auf der "Wahr"-Seite an. (diesmal ist es egal, ob wir mit der linken oder der rechten Forn anfangen.) Diese Formel fängt mit einem All-Quantor an, kann a dann wahr sein, wenn alle ihre Instanzen wahr sind. Bei der vo Tableaukonstruktion sind wir diesem Fall auch schon begegnet, dort in einer Situation, in der wir vorher schon Parameter eing hatten, die bei der Reduktion der Formel verwendet werden ko In der jetzigen Situation ist das nicht der Fall. Da aber das Wah der Formel impliziert, daß alle ihre Instanzen gelten, können wi Gefahr eine beliebige Individuenkonstante einführen und diese vom All-Quantor gebundene Variable einsetzen.[1] Wählen wir di Konstante b. Das Ergebnis ist (24)

---

1 Genau gesprochen ist dies nur deswegen unproblematisch, wewil in klassisichen Logik immer angenommen wird, daß es mindestens ein Objekt eine Annahme, die sich modell-theoretisch darin widerspiegelt, daß die vberwendeten Modelle imer ein nicht-leeres Universum haben.

(24) WAHR FALSCH

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x, y)))$ $(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y$

$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(b, y))$

Mit Hilfe der Regel für Konditionale in der "Wahr"-Spalte können jetzt die gerade entstandene Formel weiter reduzieren. Dabei sich das Tableau.

(25) WAHR FALSCH

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x, y)))$ $(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y$

$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(b, y))$

| $(\exists y)(Q(y) \& R(b, y))$ $P(b)$ |

Wir machen mit dem linken Tableau-Ast weiter. Die Existenzfor der "Falsch"-Spalte erfordert das Falsch Sein aller ihrer Instanze erlaubt eine Reduktion, in der die Variable y durch b ersetzt wi

(26) WAHR FALSCH

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x, y)))$ $(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y$

$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(b, y))$

| $(\exists y)(Q(y) \&$ $P(b)$ |
$R(b, y))$

$Q(b) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow$
$R(x, b))$

Die Reduktion der so entstandenen Konjunktion führt wiederum Spaltung:

```
(27)            WAHR                                  FALSCH

 (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y)))      (∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) →  R(x, y

   P(b) → (∃y)(Q(y) & R(b, y))
                    | (∃y)(Q(y) &||           P(b)               |
                    |      R(b, y)))                         |
                   |             ||  Q(b) &  (∀x)(P(x) →    |
___________________|_____________||_________________R(x, b))   |_____
          |        |             ||   Q(b)   | (∀x)(P(x) →  |
          |        |             ||          |          R(x, b))   |
```

Betrachten wir jetzt den linken der beiden so entstandenen Äste diesem Tableau-Ast gibt es für jede links oder rechts vorkomm komplexe Formel C ein "Reduktionsprodukt" (eine Teilformel, we Hauptoperator von C ein Junktor ist, oder eine Instanz von C, w dieser Operator ein Quantor ist), das das links oder rechts Vork der Formel, die zu ihr geführt hat, "rechtfertigt". Z.B. rechtfertig rechts Vorkommen von Q(b) das rechts Vorkommen von Q(b) & (∀x)(P(x) → R(x, b)); denn ist Q(b) falsch, dann muß auch Q(b) & (∀x)(P(x) → R(x, b)) falsch sein; ebenso rechtfertigt das rechts Vorkommen von P(b) das links Vorkommen von P(b) → (∃y)(Q(y) & R(b, y)), usw.

Die Beziehung zwischen der ursprünglichen Prämisse des Argun und ihrer Instanz P(b) → (∃y)(Q(y) & R(b, y)) ist eine etwas ande ist die Implikationsbeziehung zwischen der quantifizierten Forn ihrer Instanz umgekehrt: Das Wahr Sein einer Instanz eines All ist eine notwendige aber im Allgemeinen keine ausreichende Be für das Wahr Sein des All-Satzes selbst.

Bezüglich eines Universums, das nur aus dem einen Element b l ist die Bedingung aber nicht nur notwendig sondern auch ausr Ein All-Satz (∀x)C(x) ist wahr in Bezug auf ein Universum, wenn a Elemente des Universums die entsprechende Formel C(x) erfülle Wenn dieses Universum nur aus b besteht, dann reduziert sich Bedingung auf das Erfüllt Sein von C(x) durch b.

Dasselbe gilt für den Existenzsatz (∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, y)) in der "Falsch"-Spalte vorkommt, und seine ebenfalls dort ein

Instanz Q(b) & $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, b))$. Im Allgemeinen ist das Falsc
der Instanz nur eine notwendige Bedingung für das Falsch Sein
Existenzsatzes. Ist aber b das einzige Element überhaupt, dann
gleichzeitig auch ausreichend.

Aus diesen Erwägungen folgt, daß in einem Modell M, dessen Ur
die Einermenge {b} ist und in dem die im betrachteten Ast auft
atomaren Formeln wahr bzw. falsch sind (abhängig davon, ob si
oder rechts vorkommen), auch die komplexen Formeln, die unte
bzw. "Falsch" im Tableau-Ast vorkommen, die ihrer Position im
entsprechenden Wahrheitswerte bekommen (Wahr, wenn links;
wenn rechts). Insbesondere wird in einem solchen Modell die
wahr und der Schluß falsch sein - mit anderen Worten, das Mod
ein Gegenbeispiel für das Ausgangsargument (22).

Um sicherzustellen, daß das Modell M in der Tat ein Gegenbeispi
das Ausgangsargument (22) ist, genügt es also, die Extensionen i
die in Prämisse und Schluß vorkommenden Prädikate so zu wäh
sie mit den Vorkommen der atomaren Formeln unter "Wahr" u
"Falsch" im Einklang sind. Für die Prädikate P und Q bedeutet d
ihre Extension in M die Leere Menge sein muß. Denn das rechts
Vorkommen der atomaren Formeln P(b) und Q(b) bestimmt, daß
einzige Element des Universums von M, weder zur Extension von
zu der von Q gehören darf. Atomare Formeln, die das Prädikat
involvieren, kommen in unserem Tableau-Ast weder links noch
vor. Dies bedeutet, daß wir die Extension von R im Modell belieb
wählen können. Die Wahl wird auf die entscheidende Frage - Is
Prämisse wahr und der Schluß falsch? - keinen Einfluß haben.

Wählen wir für die Extension von R im Modell ebenfalls die leere
so kommen wir zur folgenden Definition unseres "Gegenmodells"

$U_M = \{b\}$
$P_M = \varnothing$
$Q_M = \varnothing$
$R_M = \varnothing$

Es läßt sich unschwer verifizieren, daß in diesem Modell M die P
von (22) wahr ist und der Schluß von (22) falsch.

Die beiden so weit betrachteten Beispiele suggerieren, daß sich
Methode der Semantischen Tableaus auch für den Prädikatenka
eignet. Es gibt aber einen grundsätzlichen Unterschied zwischen

Erweiterung der Methode auf die Prädikatenlogik und der im v
Abschnitt dargestellten Methode für die Aussagenlogik. Für Ar
des Aussagenkalküls führt die Tableau-Methode, wie wir gesehe
haben, immer zu einer Entscheidung - entweder zu dem Nachwe
das betreffende Argument gültig ist (das Tableau schließt) oder
Nachweis seiner Ungültigkeit (einer Bewertung der im Argumen
vorkommenden Atome, die die Prämissen wahr und den Schluß
macht). Die Tableaumethode ist, wie wir gesehen haben, ein
Entscheidungsverfahren.

Die Erweiterung der Methode, die sie den Anforderungen der
Prädikatenlogik anpaßt, ist in dieser Hinsicht problematischer.
schon allgemein beschriebene Sachlage der Beweisverfahren für
Prädikatenlogik nimmt sich für den besonderen Fall der
Tableaumethode wie folgt aus: Wenn das prädikatenlogische A
$A_1, \ldots, A_n \models B$ gültig ist, dann läßt sich dies immer nachweisen, ir
man ein für dieses Argument konstruiertes Tableau zum Absch
bringt. Ist aber das Argument nicht gültig, dann kann die Kon
eines Tableau-Asts, aus dem sich ein Gegenmodell direkt definie
unendlich viele Schritte erfordern. Einen solchen Fall werden w
sogleich ansehen.

Nun könnte man sich vielleicht vorstellen, daß auch in solchen
nach endlich vielen Konstruktionsschritten eine eindeutige Ant
erkennbar wird: Es wäre denkbar, daß sich aufgrund der bis zu
bestimmten Punkt durchgeführten Regelanwendungen vorauss
ließe, der betroffene Tableau-Ast könne nie zum Abschluß gebr
werden (Etwa aufgrund des Umstandes, daß weitere Regelanwe
nur noch schon im Tableau repräsentierte Muster wiederholen
und man so einem Tableauabschluß nicht näher käme).

Dem ist aber nicht so. Im Allgemeinen läößt sich an keinem Pu
Tableaukonstruktion mit Sicherheit sagen, ob zusätzliche
Regelanwendungen das Tableau nicht vielleicht doch noch zum
bringen werden. (Präzise formuliert: Es läßt sich keine bereche
Funktion f angeben, die für ein beliebiges Argument $A_1, \ldots, A_n \models$
Zahl n bestimmt, derart, daß wenn man nach höchstens n Schri
der Konstruktion eines semantischen Tableaus für $A_1, \ldots, A_n \models B$
noch keinen Abschluß erreicht hat, feststeht, daß eine Fortführ
Konstruktion keinen Absachluß herbeiführen würde, und daß d
Argument folglich ungültig ist.)

Fassen wir diese Beobachtungen noch mal kurz zusammen. Es g
die Konstruktion eines semantischen Tableas für ein Argument
Prädikatenlogik die folgenden Möglichkeiten: (i) Schließt das Ta
nach endlich vielen Schritten, so wissen wir, daß das Argument
ist; (ii) hat aber das Tableau nach N Schritten (auch bei sehr gr
immer noch einen oder mehrere offene Äste, so läßt sich oft üb
Gültigkeit des Arguments keine endgültige Aussage machen. Nu
wenigen (verhältnismäßig einfachen) Fällen bricht die
Tableaukonstruktion ganz ab - alle möglichen Reduktionsschritt
durchgeführt worden - und es läßt sich mit Hilfe eines der noch
Äste mit dem für den Fall (22) beschriebenen Verfahren ein
Gegenmodell definieren.

Dieses grundsätzliche Problem - daß man im Allgemeinen nicht
kann, ob zusätzliche Konstruktionsschritte das Tableau nicht do
zum Abschluß bringen könnten - ist bei den nächsten beiden B
klarer zu erkennen. Das erste dieser Beispiele betrifft ein Argu
von einer auf den ersten Blick etwas ungewöhnlichen Form, die
bisher noch nicht betrachtet haben. Wir werden zuerst etwas
Argumente dieser besonderen Form sagen.

Schematisch lassen sich Argumente dieser Form wie folgt darste

(28) $A_1, \ldots, A_n \vDash \neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$

(28) is ein Argument mit einem widersprüchlichen Schluß, einer
der in keinem Modell M wahr sein kann - jedes Element von U_M
die Formel $P(x) \vee \neg P(x)$; also gibt es, da U_M immer mindestens e
Element enthält, auch ein Element in U_M, das diese Formel erfüll
bedeutet, daß jedes Modell M, in dem Prämissen und Schluß von
einen Wahrheitswert bekommen und in dem die Prämissen A_1,
alle wahr sind, ein Gegenbeispiel für (28) ist; denn der Schluß
$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$ muß in M ja falsch sein. Also ist (28) nur da
gültig, wenn seine Prämissen inkonsistent sind, d.h. wenn es kei
gibt, in dem die Prämissen alle zugleich wahr sind.

Konstruieren wir ein Tableau für ein solches Argument, dann gi
also zwei Möglichkeiten: Entweder schließt sich das Tableau; dan
Argument gültig und damit die Prämissenmenge inkonsistent.
aber es kommt das Tableau nie zu einem Abschluß; dann gibt es
Gegenbeispiel und sind die Prämissen also konsistent. Wir könn
demnach versuchen, die Konsistenz der Prämissen von (28) dur
Konstruktion eines Tableaus nachzuweisen, Liefert uns dieses T

ein Gegenmodell, dann haben wir die Konsistenz gezeigt; schließt
dann ist die Konsistenzannahme widerlegt.

Wir betrachten jetzt den Sonderfall (29) von (28)

(29) (i), (ii), (iii) $\models \neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$

in dem (i), (ii), (iii) die folgenden Formeln sind:

(i) $(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$
(ii) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y\ \&\ y < z \rightarrow x < z)$
(iii) $(\forall x)(\exists y)\ x < y$

Die Prämissen von (29) beschreiben, wie wir im ersten Teil des gesehen haben, eine strikte partielle Ordnung, für die es kein l Element gibt. (Zur leichteren Lesbarkeit der Formeln verwende das Symbol "<" als das zweistellige Prädikat, das nach den "Axion (ii), (iii) eine solche Ordnung beschreibt.) Wir haben schon frül gesehen, daß es solche Ordnungen gibt. z.B. ist die lineare Ordr natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... eine solche Ordnung. Die natürlich Zahlen, mit ihrer Standardanordnung als Interpretation für "<" beliebige Eigenschaft - z. B. die, eine gerade Zahl zu sein, aber we Eigenschaft wir wählen, ist für die Überlegung egal - als Interpr für P, bilden also ein Gegenmodell für (29).[2] Folglich ist es nicht möglich, das Tableau für (29) zum Abschluß zu bringen.

Versuchen wir, ein Tableau für (29) zu konstruieren. Wie imm wir mit einer Ausgangstruktur an, in dem die Prämissen unter und der Schluß unter "Falsch eingetragen sind:

(30)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y\ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	

Zuerst behandeln wir den Schluß, indem wir links die Formel

---

[2] Es kann gezeigt werden, daß es unendlich viele voneinander versc Gegenmodelle für (29) gibt.

$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$ eintragen und dann den Existenzquantor mit neuen Parameter a instanziieren

(31) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y \ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a) \vee \neg P(a)$	

Weitere Reduktion dieser Formel führt zu einer Verzweigung, m unter "Wahr" im linken und $\neg P(a)$ unter "Wahr" im rechten Ast

(32) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y \ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a) \vee \neg P(a)$	

P(a) | ¬ P(a) || |

Damit haben wir den Schluß von (29) auf atomare Teilformeln und wir brauchen uns um ihn nicht weiter zu kümmern. Wir jetzt nur den linken Ast und vereinfachen die Tableaudarstellu indem wir den rechten Ast ganz weglassen.

Der nächste Schritt, den wir (im linken Ast) durchführen, betrif letzte Prämisse. Wir instanziieren den All-quantor dieser Prämi dem Parameter a:

(33) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y \ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	

Jetzt instanziieren wir den Existenzquantor der so entstandener
Dazu braucht es wieder einen neuen Parameter, für den wir b

(34) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y \ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	

Die Reihenfolge der bis zu diesem Punkt gewählten Schritte lag gewissermaßen nahe (obwohl sich die Prinzipien, nach denen d erfahrene Tableaukonstrukteur verfährt, insgesamt nicht leicht formulieren lassen - die Prinzipien sind eher "heuristisch"). Er war die Reihenfolge aber nicht; eine andere würde letztendlich selben Ziel führen, eventuell bräuchte man dann mehr Schritte.

Auch die in (34) gezeigte Konstruktionsphase gibt es eine Anzah möglichen Fortsetzungen. Und angesichts dieser bleibt auch die Erfahrung des geübten Tableaukonstrukteurs stumm. Wie wir werden, werden weitere Regelanwendungen in (34) zu einer im größeren Vielfalt von weiteren Regelanwendungen führen, ung wie man vorgeht. Bei der Auswahl der Konstruktionsschritte, die hier noch zeigen, werden wir uns, so gut es geht, auf unser Ver der intuitiven Bedeutung der Prämissen verlassen. (Mit der Tableaumethode als solcher hat diese Ausahl wenig zu tun.

Wir wählen zunächst die Prämisse (i) und instanziieren ihre bei Quantoren mit a und b. Diese beiden Schritte führen zu (35) bz

(35) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y\ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	

(36) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y\ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg\, b < a$	

(37) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y \,\&\, y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg\, b < a$	

Reduktion des Konditionals führt wieder zu einer Verzweigung,
(37). Der linke der so entstandenen Äste schließt sich. Wir ign
diesen Ast und fahren mit dem rechten fort.

(38) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y \,\&\, y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg\, b < a$	
| $\neg\, b < a$ ||	$a < b$ |
========| ||	==============|

Im rechten Ast wandert zuerst die Formel b < a auf die "Falsch"-
Als nächsten Schritt instanziieren wir jetzt den All-Quantor der
Prämisse nochmal, diesmal mit dem Parameter b. Der Existenz
der dabei entstehenden Existenzformel erfordert für ihre Insta
wiederum einen neuen Parameter; für diesen wählen wir c. Das
der drei gerade erwähnten Regelanwendungen ist (39)

(39) WAHR | FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg\, P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y \;\&\; y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg\, P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg\, b < a$	
$\neg\, b < a$	$b < a$
$(\exists y)\ b < y$	
$b < c$	

Aufgrund dessen, was wir über Ordnungen wissen, liegt es nahe die Quantoren des Transitivitätsaxioms (ii) mit a, b und c zu instanziieren. Das Ergebnis dieser drei Schritte ist

(40) WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y\ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg b < a$	
$\neg b < a$	$b < a$
$(\exists y)\ b < y$	
$b < c$	
$(\forall y)(\forall z)\ (a < y\ \&\ y < z \rightarrow a < z)$	
$(\forall z)\ (a < b\ \&\ b < z \rightarrow a < z)$	
$a < b\ \&\ b < c \rightarrow a < c$	

Die nächsten beiden Schritte - Reduktion des Konditionals und anschließend Reduktion des Antezedenz (eine Konjunktion!) in "Falsch"-Spalte, führen jeweils zu Verzweigungen.

(41)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\,(x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg\, P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(x < y \,\&\, y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\; x < y$	
$(\exists x)(P(x) \vee \neg\, P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\; a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\,(a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg\, b < a$	
$\neg\, b < a$	$b < a$
$(\exists y)\; b < y$	
$b < c$	
$(\forall y)(\forall z)\,(a < y \,\&\, y < z \rightarrow a < z)$	
$(\forall z)\,(a < b \,\&\, b < z \rightarrow a < z)$	
$a < b \,\&\, b < c \rightarrow a < c$	
| $a < c$	|| $a < b \,\&\, b < c$ |
|	|| |
| |	|| $a < b$ | $b < c$ |
=====|==========|	||========|========|

Wie in (41) angegeben, schließen sich die beiden ersten Äste. W fahren mit dem dritten Ast weiter.

Was soll jetzt zunächst gemacht werden? Es gibt noch viele mög Instanziierungen von den All-Quantoren der Prämissen mit unterschiedlichen Kombinationen der schon eingeführten Para Z.B könnte man die Quantoren von (i) mit a und a instanziieren, b und a, oder mit a und c, und .... - es gibt hier im Prinzip noch daas man machen könnte. Es läßt sich aber leicht einsehen, daß Instanziierungen zwar zu neuen Informationen führen, den Ast aber nicht zum Abschluß bringen werden. Betrachten wir etwa ersten zwei der soeben genannten. Instanziierung von (i) mit a hat den folgenden Effekt:

(42) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x)\ v\ \neg\, P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y\ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x)\ v\ \neg\, P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg\, b < a$	
$\neg\, b < a$	$b < a$
$(\exists y)\ b < y$	
$b < c$	
$(\forall y)(\forall z)\ (a < y\ \&\ y < z \rightarrow a < z)$	
$(\forall z)\ (a < b\ \&\ b < z \rightarrow a < z)$	
$a < b\ \&\ b < c \rightarrow a < c$	
$a < c$	
$a < a \rightarrow \neg\, a < a$	
| $\neg\, a < a$ || $a < a$ |	
| ||	| $a < a$

In (42) haben wir eine Verzweigung mit zwei identischen Ästen beiden haben wir die zusätzliche Formel a < a in der "Falsch"-Sp ist jetzt egal, mit welchem Ast wir weitermachen; denn ist es mö den einen zum Abschluß zu bringen, so wird das auch für den gelingen.

Instanziierung von (i) mit a und c bringt den Abschluß des Aste nicht wesentlich näher. Von den zwei Ästen, die sich aus der darauffolgenden Reduktion des Konditionals $a < c \rightarrow \neg\, c < a$ und Negationsformel $\neg\, c < a$ ergeben, schließt der, in dem $a < c$ unter eingetragen wird, und in dem anderen Ast haben wir die zusät Formel $c < a$ unter "Falsch". Alle sonstigen Subsitutionen von a, für die All-Quantoren der Prämissen haben einen ähnlichen Effe kommen zwar in den "verbleibenden" Ästen (denen, die sich ni schließen) neue Formeln hinzu, aber einen Abschluß aller neu entstehenden Äste führen die Anwendungen nicht herbei.

Eine weitere Möglichkeit ist, den All-Quantor der dritten Prämiss zu instanziieren. Daraus ergibt sich eine neue Existenzformel. Instanziierung des Quantors dieser Formel erfordert dann wied noch nicht vorkommenden Parameter, etwa d. Die beiden Schr führen zu (43), in dem auch der Ertrag der oben beschriebener Instanziierungen - die Formeln a < a und c < a unter "Falsch" mitaufgenommen worden sind.

(43)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)\ (x < y \rightarrow \neg\, y < x)$	$\neg(\exists x)(P(x)\ \mathrm{v}\ \neg\, P(x))$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x < y\ \&\ y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x < y$	
$(\exists x)(P(x)\ \mathrm{v}\ \neg\, P(x))$	
$P(a)$	
$(\exists y)\ a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\ (a < y \rightarrow \neg\, y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg\, b < a$	
$\neg\, b < a$	$b < a$
$(\exists y)\ b < y$	
$b < c$	
$(\forall y)(\forall z)\ (a < y\ \&\ y < z \rightarrow a < z)$	
$(\forall z)\ (a < b\ \&\ b < z \rightarrow a < z)$	
$a < b\ \&\ b < c \rightarrow a < c$	
$a < c$	
	$a < a$
	$c < a$
$(\exists y)\ c < y$	
$c < d$	

Jetzt fängt, könnte man sagen, die Geschichte wieder von vorne
können (ii) mit b, c und d instanziieren. Das führt zu der Forme
unter "Wahr". Eine weitere Instanziierung von (ii) mit a, b und
zu a < d unter "Wahr"; und schließlich wird eine Instanziierung
Quantors von (iii) mit d über die darauffolgende Instanziierung
Existenzquantors von (∃y) c < y wiederum einen neuen Paramet
erzeugen.

Allmählich drängt sich der Eindruck auf, daß wir auf diese Weis
immer mehr Parameter einführen, aber daß es zu einem Abschl
gesamten Tableaus wohl nie kommen wird. (Dieser Eindruck ist
natürlich mit dem, was wir ohenhin schon wissen - daß die Prä
(i), (ii), (iii) ein Modell besitzen und somit konsistent sind - im I

Es stellt sich nun aber die Frage, inwiefern die bis zu diesem Pu
durchgeführte Entfaltung des in (43) dargestellten Tableau-Aste
ermöglicht, ein "Gegenmodell" zu konstruieren, in dem die drei
Prämissen gelten. Und da sehen wir gleich, daß die Lage kompl
ist als in unserem vorletzten Beispiel (22). Dort konnte ein Geg
direkt aus dem von uns ausgewählten offenen Tableau-Ast kon
werden: Als U_M wurde die Menge der eingeführten Parameter
und die Extensionen der Prädikate wurden aufgrund der Vorko
der betroffenen atomaren Formeln unter "Wahr" und "Falsch" I
So einfach geht es hier nicht - kann es nicht gehen, denn, wie u
ausgeführt, hat die Prämissenmenge {(i), (ii), (iii)} zwar Modelle,
diese sind ausnahmslos unendlich. Dieser Umstand widerspiegel
der Möglichkeit, den All-Quantor der Prämisse (iii) immer wiede
vorher eingeführten Parametern zu instanziieren, wonach die s
entstandene Existenzformel dann wieder zur Einführung eines
Parameters Anlaß gibt. Das bedeutet, daß die bis zu einem gege
Punkt ausgeführten Tableauschritte allenfalls eine Idee geben
wie ein solches Modell aussehen möchte: U_M sollte aus einer
unendlichen Menge von Objekten a, b, c, d, ... bestehen; und die
vorhandenen atomaren Formeln suggerieren für < eine Extensio
M, die aus den folgenden Paaren besteht: <a,b>, <b,c>, <a,c>, <c,d>,
<a,d>, ... - mit anderen Worten, < soll den Objekten a, b, c, d, .. ei
Ordnung auferlegen, die ihrer Aufzählung "a, b, c, d, ..." entspric

Intuitiv ist klar, daß es für (i), (ii) und (iii) kein endliches Mode
kann. Jeder neue Parameter, der für den Existenzquantor von
eingeführt wird, muß in der erzeugten Ordnung rechts von den
Parameter liegen, der für den All-Quantor substituiert wurde.
konstruierten Tableau muß b rechts von a liegen, c rechts von b
rechts von c, usw.) Insbesondere können wir nie ein Modell aus

endlich vielen Parametern bilden, die nach einer endlichen Anz Konstruktionsschritten im Tableau vorkommen. In (43) z. B. rei Parameter a, b, c, d nicht aus, weil (iii) u.a. fordert, daß es ein E gibt, das rechts von d liegt. Weder a noch b noch c kommen da Betracht, weil für sie schon feststeht, daß sie links von d liegen Also brauchen wir noch ein weiteres Element e. Dieses verlangt aber seinerseits wieder ein Element zu seiner rechten, usw.

Der soeben diskutierte Fall ist noch verhältnismäßig übersichtlic zeigt, daß auch wenn es ausschließlich unendliche Gegenmodelle man einem solchen Modell manchmal durch einen geschickt ge Anfang der (strikt gesprochen unendlichen) Tableaukonstruktio Sliche kommen kann. Im Allgemeinen ist dies aber nicht der Fa Wenn ein Argument ungültig oder eine Formelmenge konsistent es geht darum, ein (Gegen-)Modell zu konstruieren, dann liefert Tableumethode zwar eine oft wertvolle Heuristik, aber sie gibt eindeutige Methode her, die immer nach einer gewissen Anzahl Schritten zeigen würde, wie ein Gegenmodell zu konstruieren w

Nicht in allen Fällen, wo die systematische Anwendung der Reduktionsregeln zu einer unendlichen Menge von Parametern und die Tableaukonstruktion somit nicht nach endlich vielen S zu Ende geht, muß dies bedeuten, daß es nur unendliche Gegen gibt. Dies zeigt das folgende Beispiel.

(44) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \leftrightarrow Q(y)), (\exists y)\ P(y) \vdash (\exists z)(P(z)\ \&\ Q(z))$

Der erste Schritt der hier durchgeführten Tableaukonstruktion die Existenzformel auf der linken Seite. Wir reduzieren diese Fo indem wir für die vom Existenzquantor gebundene Variable y c (neuen) Parameter a substituieren. Damit haben wir:

(45)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\exists y)(P(x) \leftrightarrow Q(y))$	$(\exists z)(P(z)\ \&\ Q(z))$
$(\exists y)\ P(y)$	
$P(a)$	

Unser nächster Schritt besteht darin, daß wir den Parameter a Existenzquantor rechts substituieren. Wir lösen sogleich auch d dadurch entstehende Konjunktion P(a) & Q(a) auf. Von den bei Ästen, die sich dabei ergeben, schließt der linke.

(46) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\exists y)(P(x) \leftrightarrow Q(y))$	$(\exists z)(P(z) \,\&\, Q(z))$
$(\exists y)\ P(y)$	
$P(a)$	
	$P(a) \,\&\, Q(a)$
	‖ $P(a)$ | $Q(a)$
===========|	‖============ |

In dem rechten Ast instanziieren wir die all-quantifizierte Form der "Wahr"-Seite ebenfalls mit a. Dadurch ergibt sich auf dieser eine neue Existenzformel, deren Reduktion die Einführung eines Parameters verlangt. Als neuen Parameter wählen wir b.

(47) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\exists y)(P(x) \leftrightarrow Q(y))$	$(\exists z)(P(z) \,\&\, Q(z))$
$(\exists y)\ P(y)$	
$P(a)$	
	$P(a) \,\&\, Q(a)$
	$Q(a)$
$(\exists y)(P(a) \leftrightarrow Q(y))$	
$P(a) \leftrightarrow Q(b)$	

Reduktion des Bikonditionals in (47) führt abermals zu einer Verzweigung in zwei Äste, von denen sich diesmal der rechte sc

```
(48)          WAHR                              FALSCH

      (∀x)(∃y)(P(x) ↔ Q(y))               (∃z)(P(z) & Q(z))
       (∃y)  P(y)
         P(a)
                                              P(a) & Q(a)

                                                  Q(a)
     (∃y)(P(a) ↔ Q(y))

         P(a) ↔ Q(b)
         P(a)     |              ||            |    P(a)
         Q(b)     |              ||            |    Q(b)
                  |================= ||        |=============
```

Wir können den neuen Parameter b wieder rechts einsetzen. R der Konjunktion, die sich so ergibt, führt abermals zu zwei Äste denen sich der eine schließt, während der andere offen bleibt.

```
(49)          WAHR                              FALSCH

      (∀x)(∃y)(P(x) ↔ Q(y))               (∃z)(P(z) & Q(z))
       (∃y)  P(y)
         P(a)
                                              P(a) & Q(a)

                                                  Q(a)
     (∃y)(P(a) ↔ Q(y))
         P(a) ↔ Q(b)
         P(a)
         Q(b)
                                              P(b) & Q(b)

                  |               ||          P(b) |    Q(b)
                  |================= ||        |=============
```

Wir können, und sollten, jetzt den Parameter b für den All-Qua der "Wahr"-Spalte einsetzen. Es ist aber leicht einzusehen, daß nicht wesentlich weiterhilft. Zwar schließen sich wieder die me Äste, die bei der Weiterverarbeitung entstehen, aber einer dies bleibt wiederum offen. Das Ergebnis sei noch einmal gezeigt.

(50) WAHR FALSCH

```
        (∀x)(∃y)(P(x) ↔ Q(y))          (∃z)(P(z) & Q(z))
         (∃y) P(y)
            P(a)
                                          P(a) & Q(a)

                                             Q(a)
     (∃y)(P(a) ↔ Q(y))
          P(a) ↔ Q(b)
          P(a)
          Q(b)
                                          P(b) & Q(b)
                                          P(b)
     (∃y)(P(b) ↔ Q(y))
          P(b) ↔ Q(c)

          P(b)     |             ||          |    P(b)
          Q(c)     |             ||          |    Q(c)
  =============== |             ||============= |
```

Es besteht nun abermals die Möglichkeit, den All-Quantor links r instanziieren, wonach die Instanziierung der entstandenen Existenzformel abermals die Einführung eines neuen Parameter verlangt. Der Konstruktionsprozess ist also noch nicht abgeschlo könnte leicht die Vermutung entstehen, daß der noch offene As eine partielle Beschreibung eines unendlichen Modells gesehen kann. In diesem Fall ist das aber nicht notwendig. Denn, wenn aufgrund der Bedingungen, die in dem offenen Ast von (50) en sind, ein Modell M definieren. indem wir U_M mit der Parameter {a, b, c} gleichsetzen und die Extensionen von P und Q im Einklar den atomaren Formeln im Ast wählen:

(51) U_M = {a, b, c}
P_M = {a}
Q_M = {b}

so stellen wir fest, daß die Prämissen von (44) wahr sind und d falsch. Es gibt also Argumente, bei denen einerseits die Tableaukonstruktion bei strikter Befolgung der Konstruktionsre unendlich fortläuft und zur Einführung unendlich vieler Param führt, für die es aber andererseits dennoch endliche Gegenbeisp h. Gegenmodelle mit endlichen Universen) gibt.

Die Tableau-Regeln für die Junktoren der Aussagenlogik haben Seiten 7 und 8 schon schematisch dargestellt. Die Regeln für di Quantoren wurden zwar beschrieben und in den Beispielstable angewandt, aber eine präzise Darstellung dieser Regeln fehlt noc diese Regeln wollen wir jetzt explizit formulieren and tabellaris präsentieren. Eine genaue Beschreibung der Quantorenreglen i übrigens in diesem Fall besonders wichtig, weil bei ihnen, wie w gesehen haben, zum Teil auch neue Prinzipien der Regelanwend berücksichtigt werden müssen, die im Aussagenkalkül keine Rol spielen: Wie in den Beispielen immer wieder betont wurde, unterscheiden sich zwei von den Quantorenregeln von allen an Readuktionsregeln dadurch, daß sie wiederholt auf einunddiese Formel angewendet werden können und manchmal beliebig oft dieselbe Fromel angewendet werden müssen.

Bevor wir uns diesen Regeln zuwenden - es handelt sich um die für all-quantifizierte Formeln auf der "wahr"-Seite und die für quantifizierte auf der "Falsch"-Seite - betrachten wir zuerst die anderen Quantorenregeln, für existenz-quantifizierte Formeln li all-quantifizierte rechts.

Wir wiederholen unsere Überlegungen zu diesen Regeln (s. S.) Sei (∃x)A(x) eine Existenzformel unter "Wahr". Damit ist die Bed ausgedrückt, daß diese Formel wahr sein soll. (∃x)A(x) ist aber wahr, wenn es irgendein Objekt a gibt, das die Formel A(x) erfül anders gesagt: Es muß mindestens eine Formel von der Form A(geben, die wahr ist. Wir können also die Bedingung, daß (∃x)A(x ist, auf die Bedingung reduzieren, daß irgendeine Formel von de "A(c)" wahr ist. Dabei ist unbekannt, welchen "Namen" c hier zu verwenden ist, denn wir wissen ja nicht, welches Objekt die For erfüllt. Wir können aber unserem Nicht-Wissen dadurch gerec werden, daß wir in die "Wahr"-Spalte eine Formel A(c) mit einer "unbelasteten" Konstante c eintragen, einer Konstante, von der "ganz offen" ist, welches Objekt sie bezeichnet. Wie schon argu erreichen wir diesen Effekt, indem wir eine Konstante wählen, bisher noch nicht im Tableau vorkommt.

Die Regel für all-quantifizierte Formeln auf der "Falsch"-Seite ist Das Rechts Vorkommen von (∀x)A(x) bedeutet, daß (∀x)A(x) falsc soll. Das ist genau dann der Fall, wenn es ein Objekt a gibt, das nicht erfüllt, also, wenn für irgendeine Konstante c A(c) falsch is hier erfassen wir diese Bedingung, indem wir der Spalte eine Fo A(c) hinzufügen, wobei c eine noch nicht verwendete Konstante

Es ist zu betonen, daß die beiden gerade beschriebenen Regeln a Formel immer nur einmal angewandt zu werden brauchen - in Hinsicht sind sie wie die Regeln für die Junktoren. Denn sobald eine Formel von der Form A(c) wahr ist, so folgt daraus schon, d $(\exists x)A(x)$ wahr sein muß; und ist auch nur eine Formel A(c) falsch auch $(\forall x)A(x)$ falsch: Die neue, durch Anwendung der Regel entstandene Bedingung garantiert, daß die alte Bedingung gelter und da diese sowieso erfüllt ist, wenn die neue erfüllt ist, brauc sie nicht weiter zu berücksichtigen.

Mit den beiden anderen Quantorenregeln ist die Sache anders l Betrachten wir zum Beispiel das Vorkommen einer Formel $(\forall x)A$ unter "Wahr". Dies bedeutet, daß $(\forall x)A(x)$ wahr sein soll, also, d Objekt (des betreffenden Universums) A(x) erfüllen soll. Daraus daß A(c) für jedes Objekt c wahr sein soll. Wenn wir bei der Konstruktion eines Gegenmodells aus einem offenen Tableau-Ast den Beispielen verfahren, und für das Universum dieses Modells Menge aller in dem betreffenden (offenen) Tableau-Ast vorkon Konstanten wählen, dann muß also das Modell, damit es $(\forall x)A(x$ verifiziert, auch für jeden solchen Parameter c die Formel A(c) verifizieren. Um sicherzustellen, daß dies der Fall ist, ist es notw daß all diese Formeln A(c) in die "Wahr"-Spalte eingetragen wer Also muß man immer, wenn ein neuer Parameter c eingeführt v Regel aufs Neue auf $(\forall x)A(x)$ anwenden, um so die entsprechend Formel A(c) auf der "Wahr"-Seite zu erzeugen.

Ganz ähnlich ist der Fall einer Existenzformel auf der "Falsch"-Se Damit $(\exists x)A(x)$ falsch ist, muß A(c) für jeden im Tableau-Ast vorkommenden Parameter falsch sein; um dies sicherzustellen, solche Formel A(c) unter "Falsch" eingetragen werden, wenn der entsprechende Parameter c in den Tableau-Ast eingeführt wird. hier kann die Regel mehrfach und muß sie in manchen Fällen b oft angewendet werden.

Es folgen jetzt die schematischen Darstellungen der vier Regeln:

(52)

$(\forall,L)$	WAHR	FALSCH
	$(\forall v_i)\ A$	
	$A(c/v_i)$	

(c beliebiger Parameter)

WAHR	FALSCH	$(\forall,R)$
	$(\forall v_i)\ A$	
	$A(c/v_i)$	

(c neuer Parameter)

$(\exists,L)$	WAHR	FALSCH
	$(\exists v_i)\ A$	
	$A(c/v_i)$	

(c neuer Parameter)

WAHR	FALSCH	$(\exists,R)$
	$(\exists v_i)\ A$	
	$A(c/v_i)$	

(c beliebiger Parameter)

Anwendungsbedingungen:

- Die Regeln $(\forall,R)$ und $(\exists,L)$ braucht man auf eine gegebene Fo ($(\forall v_i)\ A$ unter "Falsch", bzw. $(\exists v_i)\ A$ unter "Wahr") immer nu einmal anzuwenden. Der in einer solchen Anwendung verv Parameter muß einer sein, der im Tableau bisher noch nich vorkam.

- Die Regeln $(\forall,L)$ und $(\exists,R)$ können auf eine gegebene Formel ($(\forall v_i)\ A$ unter "Wahr" bzw. $(\exists v_i)\ A$ unter "Falsch") beliebig o angewandt werden, und zwar für jeden im Tableau vorkommenden Parameter.

Die Möglichkeit wiederholter Anwendungen der letzten beiden auf eine Formel ist dafür verantwortlich, daß Tableaukonstrukt unendlich weitergehen können. Das wiederum ist für die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik verantwortlich - d.h. fü Umstand, daß es kein Verfahren geben kann, das für jedes prädikatenlogische Argument in endlich vielen Schritten zu ein Entscheidung der Frage führt, ob das Argument gültig ist oder

Das Gesetz vom Ausgeschlossenen Dritten.

Wie wir gesehen haben, schließt das Tableau für das ungültige Argument (22) nicht. Hier nochmal das Tableau, zu dem die Konstruktion uns geführt hatte, und dessen linke Ast zu dem au definierten Gegenmodell führte:

(22) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x, y))) \vdash$
$(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$

(27) WAHR FALSCH

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x, y)))$ $(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y$

$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(b, y))$
$\mid (\exists y)(Q(y) \&$ $P(b)$ $\mid$
$R(b, y))$
$Q(b) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow$
$R(x, b))$
$\mid$ $Q(b)$ $\mid (\forall x)(P(x) \rightarrow$
$R(x, b))$

Aus dem Tableau-Ast, der sich in diesem Diagramm ganz links b leiteten wir das Gegenbeispiel (53) ab:

(53) $U_M = \{b\}$
$P_M = \varnothing$
$Q_M = \varnothing$
$R_M = \varnothing$

Wie wir in unserer Diskussion von (22) bemerkten, ist dieses M nur zum Teil vom ausgewählten Tableau-Ast festgelegt: Das Un und die Extensionen von P und Q sind durch die Parametermen die Vorkommen der atomaren Formeln P(b) und Q(b) eindeutig bestimmt, aber über die Extension von R macht der Ast keine A Wie schon bemobachtet, bedeutet dies, daß wir die Extension von beliebig so definieren können (also, entweder als $\varnothing$ oder als {<b,b beiden Fällen bekommen wir ein Modell, in dem die Prämisse vo wahr und sein Schluß falsch ist.

Eine ähnliche Situation ergibt sich, wenn wir das Tableau für da Argument (54) konstruieren. (Wie wir im ersten Teil dieses Sk schon beobachtet haben, ist dieses Argument ungültig.)

(54) p v (q & r) ⊦ (p v q) & r

(55) zeigt das Tableau, nachdem alle möglichen Reduktionen durchgeführt worden sind.

```
(55)           WAHR                              FALSCH

          p v (q & r)                          (p v q) & r

                    |          ||        p         |     r
                    |          ||        q         |
     p      | q & r  p | q & r ||        |         |     |
          |    q    |  |   q   ||        |         |     |
          |    r    |  |   r   ||        |         |     |
  ======= ||=======| |======= ||=========|========++=====
```

In diesem Tableau gibt es einen offenen Ast und in diesem kom der "Wahr"-Spalte und r in der "Falsch"-Spalte vor, q aber wede einen noch in der anderen. Diesem Umstand entspricht die Tat daß eine Bewertung, die die p und r auferlegten Bedingungen e also p wahr und r falsch macht - die Prämisse von (53) verifizi den Schluß falsifizieren wird, ungeachtet, ob sie q wahr macht falsch.

Der Spielraum, den uns mancher offene Tableau-Ast bei der De eines Gegenbeispiels läßt, ist also, wie die Beispiele zeigen, nicht problematisch: Solang man das Modell innerhalb dieses Spielra definiert, wird sich immer ein Gegenbeispiel ergeben. Dennoch kurz darauf hingewiesen, daß sich diese Art von "Unterspezifizi vermeiden läßt. Dazu brauchen wir aber eine zusätzliche Konstruktionsregel. Diese Regel besagt, daß man zu jeder Zeit b Instanzen des "Gesetzes vom Ausgeschlossenen Dritten" unter " eintragen darf.

Das Gesetz vom Ausgeschlossenen Dritten ist das Prinzip, daß es den Wahrheitswerten "Wahr" und "Falsch" keine weiteren gibt. hier entwickelten klassischen Aussagen- und Prädikaten-Logik, angenommen wird, daß jede Proposition einen Wahrheitswert h bedeutet dies, daß jede Proposition entweder wahr oder falsch dies wiederum impliziert, daß jede Formel von der Form A v ¬A gültig ist. Denn es gibt für A nur zwei Möglichkeiten: Entweder i wahr, und dann ist A v ¬A wahr wegen Wahrheit seines ersten Disjunkts, oder A ist falsch, aber dann ist ¬A wahr und A v ¬A v wegen Wahrheit des zweiten Disjunkts.

Da beliebige Formeln dieser Form logisch gültig und somit in ke Modell falsch sind, können wir sie in jedem Tableau oder Table der "Wahr"-Spalte aufnehmen, ohne daß sich dadurch das Abschlußverhalten des Tableaus ändert: (i) Schließt das Tableau der Tableau-Ast ohne zusätzliche Formeln dieser Form, dann wi Hinzunahme solcher Forsmeln daran (selbsverständlich) nichts und (ii) das Umgekehrte gilt ebenfalls.; denn ist das Tableau für ursprüngliche Argument (ohne die zusätzlichen Prämissen von A v ¬A) nicht zum Abschluß zu bringen, so würde dies bedeuten ein Gegenmodell für dieses Argument gibt. In einem solchen Gegenmodell M würden die zusätzlichen Formeln von der Form A aber auch alle wahr sein (denn diese sind ja in allen Modellen und somit wäre M ebenfalls ein Gegenmodell für das Argument erweiterten Prämissenmenge. Aus der Korrektheit der Tableau (die wir hier zwar nicht bewiesen, auf die wir aber schon wiede hingewiesen haben) folgt dann aber, daß sich das Tableau für d Argument mit der erweiterten Prämissenmenge auch nicht schl wird. Umgekehrt folgt also, daß wenn sich das Argument mit de erweiterten Prämissenmenge schließt, sich das Tableau für das ursprüngliche Argument ebenfalls schließen wird.

Durch Hinzufügung von Instanzen des Gesetzes vom Ausgeschlo Dritten können wir bewerkstelligen, daß ein offener Tableau-Ast eine beliebige atomare Formel A den Wahrheitswert für A festle Dazu tragen wir die Formel A v ¬A in den Ast unter "Wahr" ein. Reduktion der Formel führt dann zu einer Verzweigung des Aste den beiden so entstandenen Ästen enthält der erste A unter "V während im zweiten A unter "Falsch" vorkommt. Wenn wir den Ast von (55) diesem Verfahren unterziehen, indem wir q v ¬q i diesem Ast unter "Wahr" eintragen, entsteht (56).

```
(56)            WAHR                                    FALSCH

            p v (q & r)                              (p v q) & r

                       |            ||       p          |        r
                       |            ||       q          |
        p     | q & r  | p   | q & r ||     |          |        |
             |    q    |     |   q   ||     |          |        |
             |    r    |     |   r ||       |          |        |
  ======= ||=======| q v ¬q |======||=== ====|======+===+===
                       | q |¬q |      ||                 |   |    |
                       |   |   |      ||                 |   | q  |
```

In (56) gibt es statt einem zwei offene Äste, die jeweils ein Gegenbeispiel eindeutig bestimmen. Nach den im ersten Ast enthaltenen Angaben muß p wahr, r falsch und q war sein; dem Ast zufolge muß p wahr sein und r und q beide falsch. Wie wir gesehen haben, sind beide Bewertungen Gegenbeispiele für (54)

Auf ähnliche Weise können wir im linken Ast vom Tableau (27) Hinzufügen von R(b,b) v ¬R(b,b) unter "Wahr" eine Verzweigung Äste herbeiführen, die den Wahrheitswert der Formel R(b,b) un die Extension von R in dem zu konstruierenden Modell (mit U_M = festlegen.

Das Prinzip, daß der Prämissenmenge eines Arguments bestimm Formeln hinzugefügt werden können, ohne daß die Gültigkeit de Argment davon beeinflußt wird - war es gültig , so bleibt es gült es ungültig, so bleibt es ungültig - gilt nicht nur für Instanzen c Gesetzes vom Ausgeschlossenen Dritten, sondern für logisch gült Formeln allgemein, und zwar aus demselben, für Instanzen des Ausgeschlossenen-Dritten-Gesetzes oben erwähnten Grund: Weil gültige Formeln nie falsch sind, können sie, wenn man sie in ein Tableau-Ast unter "Wahr" einträgt, nie zu einem Abschluß führe sich nicht auch sowieso ergeben hätte. Wir werden später, bei Behandlung der "axiomatischen" Beweismethode, von einem ana Prinzip Gebrauch machen, nach dem jede schon bewiesene Form "Hilfsprämisse" in weiteren Beweisen verwendet werden darf.

Zum Abschluß dieses Abschnitts fassen wir die wichtigsten Eigenschaften der Tableaumethode für die Prädikatenlogik nocl kurz zusammen:

1. Die Methode ist vollständig. Ist das Argument $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ so läßt sich dies durch die Konstruktion eines geschlossenen Tableaus nachweisen.

2. Die Methode ist korrekt: Ist das Argument nicht gültig, so k die Tableakonstruktion nicht zumTableau-Abschluß führen

3. Die Methode ist kein Entscheidungsverfahren: Ist nach end vielen Konstruktionsschritten noch kein Abschluß des Table erreicht worden, so kann daraus im Allgemeinen nichts übe Gültigkeit des Arguments geschlossen werden.

4. Insbesondere gibt es Argumente, für die die Tableaukonst unendlich ist: Nach jeder endlichen Anzahl von Konstruktionsschhritten gibt es noch offene Tableau-Äste m möglichen aber noch nicht durchgeführten Reduktionen.

3. Prädikatenlogik mit Identität.

Die soweit formulierten Tableau-Regeln definieren ein vollständ Beweisverfahren für den Prädikatenkalkül ohne Identität. Für Prädikatenlogik mit Identität brauchen wir zwei weitere Regeln, logischen Eigenschaften der Identitätsrelation entsprechen. Wie Regeln aussehen sollen, läßt sich wieder am besten an Beispieler illustrieren.

Hier das erste Beispiel. Wenn der Autor von "Waverley" ein tal Schriftsteller ist, und Walter Scott ist der Autor von "Waverley", daß Walter Scott ein talentierter Schriftsteller ist - formalisiert Prädikatenlogik: $T(c), c = d \models T(d)$. Es gibt aber unter den bishe formulierten Tableau-Regeln keine, die das Tableau für dieses Argument zum Abschluß bringt:

(57)

WAHR	FALSCH
$c = d$	$T(d)$
$T(c)$	

Es ist offensichtlich, was für eine Regel hier vonnöten ist: Die Pr
der Identitätsaussage "c = d" unter "Wahr" sollte es uns erlaube
der Bedingung, daß die Formel T(c) wahr ist, die Bedingung abz
daß auch die Formel T(d) wahr ist. Denn, wenn c identisçh ist m
dann ist die Behauptung, daß c das Prädikat T erfüllt, natürlich
äquivalent mit der Behauptung, daß d dieses Prädikat erfüllt. M
anderen Worten, wenn "c = d" in der Spalte "Wahr" vorkommt,
Formel A kommt dort ebenfalls vor, dann soll es möglich sein, in
Spalte ebenfalls eine Formel A' einzutragen, die wir bekommen
wir c in A an einer oder mehreren Stellen durch d ersetzen.

Akzeptieren wir dieses Prinzip als weitere Tableau-Regel, dann
das Tableau (57) natürlich:

(58)

WAHR	FALSCH
c = d	T(d)
T(c)	
T(d)	

===

Wir können das gerade formulierte Prinzip noch etwas verallge
und verschärfen. Zuerst sei bemerkt, daß wir aus "c = d" und d
komplexen Formel "R(a,c) $\rightarrow$ R(b,c)" nicht nur die Formel
"R(a,d) $\rightarrow$ R(b,d)", sondern ebensogut "R(a,c) $\rightarrow$ R(b,d)" und
"R(a,d) $\rightarrow$ R(b,c)" ableiten können; wenn c und d einunddasselbe
sind, dann sagen all diese Formeln dasselbe aus. Zweitens gilt d
Prinzip nicht nur für den Fall, in dem sich die Formel A links (al
Spalte "Wahr") befindet, sondern auch wenn sie rechts steht: W
c identisch ist mit d, dann ist die Bedingung, daß A falsch ist
gleichwertig mit der Bedingung, daß A' falsch ist.

Die Version der Tableau-Regel, die wir jetzt formulieren, trägt b
Verallgemeinerungen Rechnung. Wir präsentieren die Regel in
schon gewohnten schematischen Form; die schematische Darstel
umfaßt zwei Fälle, einen für den Fall, in dem A links und der ar
den Fall, wo A rechts steht:

WAHR	FALSCH	WAHR	FALSCH	(=,Subst)
c = d		c = d		
A			A	
———————		———————		
A'			A'	

Die hier formulierte Identitätsregel ist nur dann anwendbar, w Formel "c = d" schon auf der linken Seite vorkommt. Deshalb ist nicht in der Lage, die Reflexivität der Identität nachzuweisen: D Formel

(59)(∀x)(x = x)

ist logisch gültig, aber mit den uns soweit verfügbaren Tableau läßt sich dies nicht beweisen. Wir brauchen eine weitere Regel, eine, die besagt, daß jede Formel von der Form "c = c" wahr sein Die einfachste Version einer solchen Regel ist wohl die, nach der Formel "c = c" ohne weitere Begründung in die "Wahr"-Spalte be Tableau-Äste eingetragen werden darf. Schematisch können wi Regel wie in (60) darstellen:

(60)

WAHR	FALSCH	(=, Ref)
———		
c = c		

Bei Verwendung der Regel (=.Ref) wird der Nachweis, daß (56) gü trivial. Nachdem der erste Schritt (Instanziierung des All-Quan durch einen neuen Parameter) zu (61) führt,

(61)

WAHR	FALSCH
	(∀x)(x = x)
	a = a

erlaubt uns die neue Identitätsregel die Formel "a = a" links hinzuzufügen. Damit erfolgt der Abschluß des Tableaus:

(62)	WAHR	FALSCH
		$(\forall x)(x = x)$
		$a = a$
	$a = a$	

==

Die beiden Identitätsregeln ermöglichen insbesondere die Verif von zwei weiteren salienten Eigenschaften der Identität, Symme Transitivität. Das heißt, wir können mit Hilfe der Tableaumetho logische Gültigkeit der folgenden beiden "Argumente" nachweis

(63) $\models (\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$

(64) $\models (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x = y \ \& \ y = z) \rightarrow x = z)$

Das Tableau für (63) ergibt sich wie folgt:

(65)	WAHR	FALSCH
		$(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$
		$a = b \rightarrow b = a$
	$a = b$	$b = a$
(i)	$a = a$	
(ii)	$b = a$	

==============================||==============================

Hier ist (i) durch die gerade formulierte Regel (=,Ref) gerechtfer während (ii) sich durch die Regel (=,Subst) aus (i) und "a = b" e

Der Beweis von (64) ist dem Leser überlassen.

Das Vorkommen von = verursacht eine gewisse Komplikation in Definition von Gegenmodellen. Bisher war das Universum des M M, das auf Basis eines offenen Tableau-Astes konstruiert wurde, die Menge aller im Ast vorkommenden Parameter. Die Paramet spielten also die Rolle von Individuen, die sie selbst, in ihrer Fu als Symbole des Kalküls, in M bezeichneten.

Sobald wir die Identität in den Prädikatenkalkül zulassen, könn die Universa der Gegenmodelle im Allgemeinen nicht länger auf einache Weise definieren. Dies hat folgenden Grund. Wenn ein

"Gleichungsformel", etwa c = d, in der "Wahr"-Spalte eines Table vorkommt, dann müssen in einem Modell, das alle Formeln in d "Wahr"-Spalte verifiziert, c und d dasselbe Objekt bezeichnen, d sonst würde das Modell die Formel falsifizieren. Würdfen wir b Modellkonstruktion so verfahren wie bisher, dnn würden c und verschiedene Objekte bezeichnen (nämlich, jeweils sich selbst) u d" wäre falsch.

Um dies zu vermeiden, verfahren wir wie folgt. Im zu konstrui Modell soll ein Parameter nicht länger sich selbst bezeichnen, s eine bestimmte Menge von Parametern, der er selbst als Elemer angehört. Kommt "c = d" unter wahr vor, dann sollen c und d b dieselbe Menge bezeichnen, also eine, die beide enthält. Wir er dies indem wir als Mengen die Äquivalenklassen nehmen, welch eine Äquivalenzbeziehung ≡ erzeugt werden, die immer dann zv und d gilt, wenn "c = d" im ausgewählten Tableau-Ast unter Wa vorkommt.

Wäre die Beziehung, die genau dann zwischen zwei im Ast vorkomnmenden Parametern c und d besteht, wenn "c = d " in "Wahr"-Spalte vorkommt, selbst eine Äquivalenzbeziehung, so k wir U_M als die Menge der von dieser Beziehung erzeugten Äquivalenzklassen definieren und damit wäre unser Problem gel Tableaus, die nach dem bisherigen Verfahren konstruiert werd dies aber im Allgemeinen nicht der Fall sein. Dies sehen wir am folgenden Beispiel, in dem wir mit der schon erprobten Method Tableau für das ungültige Argument (66) konstruieren.

(66) $(\forall y)(\exists z)(P(z) \;\&\; y = z) \quad \vdash \quad (\exists y)\ Q(y)$

(Daß (66) ungültig ist, ist offensichtlich. Denn der Schluß besagt etwas gibt, das die Eigenschaft Q besitzt, während die Prämisse etwas abstruse Formulierung der Bedingung ist, daß alle Objekte Eigenschaft P haben. Diese zweite Behauptung hat mit der erste zu tun, ist also keine Garantie dafür, daß die erste wahr ist.)

(67) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall y)(\exists z)(P(z)\ \&\ y = z)$	$(\exists y)\ Q(y)$
	$Q(a)$
$(\exists z)(P(z)\ \&\ a = z)$	
$P(b)\ \&\ a = b$	
$P(a)$	
$a = b$	
$P(c)\ \&\ b = c$	
$P(c)$	
$b = c$	

Die Konstruktionsmöglichkeiten sind hiermit noch nicht erschöp wir können den All-Quantor noch mit dem Parameter c instanz: Für den Existenzquantor der so entstandenen Existenzformel sol wieder ein neuer Parameter (z. B. d) eingeführt werden, der da wieder für den All-Quantor der Prämisse eingestzt werden kann Es ist aber intuitiv klar, daß wir das Tableau nicht zum Abschlu bringen werden, indem wir so weitermachen. Andererseits ist Punkt, um den es hier geht, schon jetzt deutlich erkennbar und angedeuteten Weiterführung der Konstruktion ist er nicht affiz Definieren wir, für beliebige Tableau-Äste A die Relation wie in (

(*) $c\ R_A\ d \equiv_{df.}$ die Formel "c = d" kommt im Tableau-Ast A unt "Wahr" vor

dann ist diese Relation R_A im Fall von (67) keine Äquivalenzrela Damit sie eine wäre, sollten außer den Gleichungen a = b und b = noch a = a, b = b, c = c, b = a, c = b und c = a unter "Wahr" vorkc

In dieser Hinsicht ist (67) keine Ausnahme, sondern die Regel. I relativ seltenen Fällen führt das bisher von uns verwendete Konstruktionsverfahren zu Tableau-Ästen, für die die Relation R Eigenschften einer Äquivalenzbeziehung besitzt.

Es ist aber möglich, das Konstruktionsverfahren so zu modifizier die mit den Ästen assoziierten Relationen R_A immer Äquivalenzbeziehungen werden. Dazu machen wir von der Beo auf Sn. 41- 44 Gebrauch, daß wir unter "Wahr" während der Tableaukonstruktion beliebige Formeln eintragen dürfen, die lo gültig sind. Diese Prozedur führt zwar zu zusätzlichen Reduktio damit zuletzt auch zu neuen atomaren Formeln in den Spalten betroffenen Tableau-Asts, aber wie wir gesehen haben, besteht

Gefahr, daß dadurch ein falsches Ergebnis erreicht wird: Der Ta
Ast, in den die zusätzlichen Formeln eigetragen worden sind, sc
nur dann, wenn sich derAbschluß auch ohne diese zusätzlichen
ergeben hätte.

Wir können von dieser Möglichkeit dahingehend Gebrauch mach
wir gewisse Instanzen des Symmetrie- und des Transitivitäts-Ge
der Identität unter "Wahr" eintragen. (Nätürlich sind diese Ins
als Instanzen von logisch gültigen All-Quantifizierungen, auch w
logisch gültig.) Auf diese Weise können wir sicherstellen, daß w
"a = b" unter "Wahr" vorkommt, dies auch für "b = a" der Fall se
und daß das unter "Wahr" Vorkommen von "a = b" und "b = c" d
dortige Vorkommen von "a = c" impliziert. Überdies erlaubt uns
Regel (=,Ref), beliebige Formeln von der Form "a = a" links einzu
womit der Reflexivität der Relation R_A Gewähr geleistet werden

Auf diese Weise können wir jeden Tableau-Ast so mit Gleichunge
"aufstocken", daß (*) in der Tat eine Äquivalenzbeziehung defini
zeigen dies explizit für den Fall von (67).

```
(68)            WAHR                              FALSCH

          (∀y)(∃z)(P(z) & y = z)                (∃y) Q(y)

                                                   Q(a)

               (∃z)(P(z) & a = z)
                   P(b) & a = b
                   P(a)
                   a = b

                  P(c) & b = c
                  P(c)
                  c = b

                   a = a
                   b = b
                   c = c
          (∀x)(∀y)(x = y → y = x )
____________________a = b → b = a ||_____________________.
               |          b = a   ||  a = b |
================|                 ||==========|
                                  ||
____________________b = c → c = b ||_____________________
               |          c = b   ||  b = c |
================|                 ||==========|
                                  ||
 (∀x)(∀y)(∀z)(x = y & y = z → x = z )
_______________a = b & b = c → a = c_____________________
               |          a = c   ||  a = b & b = d
         |     |                  ||  a = b | b = c   |
=======|======= |                 ||=======|======= |
____________________a = c → c = a ||_____________________
               |          c = a   ||    a = c        |
================|                 ||================|
```

In dem einzigen offenen Ast von (68) kommen nun alle Gleichu die vorhin noch fehlten, und damit ist die durch (*) definierte in der Tat eine Äquivalenzbeziehung.

Es läßt sich leicht einsehen, daß mit Hilfe von (=,Ref) und den Symmetrie- und Transitivitätsgesetzen jeder Tableau-Ast so au werden kann, daß die durch (*) definierte Relation zu einer

Äquivalenzbeziehung "aufgebläht" wird. Wir dürfen also davon ausgehen, daß die offenen Äste, die als Basis für die Konstruktio Gegenmodellen verwendet werden, immer dieser Prozedur unt worden sind und die entsprechende Relation somit eine Äquivalenzrelation ist.

In dem vorliegenden Fall generiert die Äquivalenzbeziehung ge Äquivalenzklasse {a,b,c}. Das bedeutet, daß das Universum des M, zu dem der offene Ast von (68) führt, aus nur einem Elemen dieser einen Äquivalenzklasse - besteht; U_M = {{a,b,c}}. Die Exten der Prädikate können nun allgemein nach dem folgenden Prinz definiert werden: Kommt die Formel $P^n(a_1, ..., a_n)$ im gewählter unter "Wahr" vor, und gehören die Parameter $a_1, ..., a_n$ den Äquivalenzklassen $A_1, ..., A_n$ an, dann (und nur dann) wenn es solche Formel unter "Wahr" gibt, gehört das Tupel $\langle A_1, ..., A_n \rangle$ zu Extension des Prädikats. Für das Modell M, das wir aus dem off von (68) konstruieren, bedeutet dies, daß P_M = {{a,b,c}} und Q_M = läßt sich leicht verifizieren, daß in diesem Modell die Prämisse v wahr ist und der Schluß falsch.

Wir haben schon bemerkt, daß die Tableaukonstruktion in (67) gesprochen noch nicht zuende ist (und dasselbe gilt für (68)), All-Quantor der Prämisse ist noch nicht mit dem Parameter c instanziiert. Führt man diesen Instanzierungsschritt durch, da erfordert die Reduktion der dadurch entstandenen Existenzforn Einführung eines zusätzlichen neuen Parameters, der dann wie die all-quantifizierte Variable x eingesetzt werden muß, und so infinitum. Im vorliegenden Fall bedeutet das aber (im Gegensat dem im vorigen Abschnitt diskutierten Fall (29)) nicht, daß auf Weise ein unendliches Gegenmodell erzeugt wird; denn alle neu eingeführten Parameter sind durch die links auftretenden Glei mitenander verbunden und müssen daher als Namen einundd Objekts betrachtet werden. Mit anderen Worten, alle Paramete gehören derselben durch R_A erzeugten Äquivalenzklasse an. W wir die Tableaukonstruktion auch fortsetzen, das Universum de Modells, das von dem dann vorhandenen (offenen, sei es strikt gesprochen immer noch unfertigen) Tableau-Ast bestimmt wird aus nur einem Element bestehen. Dieses Element wird zwar selb Menge von Parametern, ständig größer, aber das Universum en immer nur diese eine Menge als ihr einziges Element, hat also ir Sinne immer die "Größe Eins".

Die Eigenschaften der Tableau-Methode, die wir zum Schluß des
Abschnitts zusammenfaßten, werden von der Erweiterung der I
auf den Prädikatenkalkül mit Identität (unter Hinzunahme der
(=,Subst) und (=,Ref)) nicht affiziert. Die Methode der Semantisc
Tableaus ist:

(i) für den Prädikatenkalkül mit Identität vollständig - fü gültige Argument des Kalküls läßt sich das Tableau in e vielen Schritten zum Abschluß bringen;

(ii) korrekt - wenn das Argument nicht gültig ist, kommt d Tableau nicht zum Abschluß;

(iii) kein Entscheidungsverfahren. (Dies ergibt sich direkt a dem Umstand, daß die Methode schon für den Prädika kalkül ohne = kein Entscheidungsverfahren ist.)

4. Prädikatenlogik mit Identität und Funktionskonsta

Zuletzt kommen wir zur Prädikatenlogik mit Identität und Funktionskonstanten beliebiger Stelligkeit. Die Hinzunahme von Funktionkonstanten erfordert keine Erweiterung unseres Regel Der einzige Unterschied mit dem Systemm vom letzten Abschnit die Prädikatenlogik mit Identität aber ohne Funktionskonstant besteht darin, daß einige Regeln jetzt einer allgemeineren Form bedürfen. Die betroffenen Regeln sind (i) die Quantorenregeln ((∃,R) und (ii) die Identitätsregeln (=,Subst) und (=,Ref). Jede die Regeln involviert, in der bisherigen Formulierung, den Begriff ei Parameters (oder, was ja dasselbe ist, den einer Individuenkon Bei den ersten drei wird ein Parameter für eine Variable subst bei der letzten steht derselbe Parameter links und rechts vom Identitätssymbol "=". Für den Prädikatenkalkül mit Funktionskonstanten reichen diese bisherigen Formulierungen Betrachten wir beispielsweise die Regel (∀,L). Wir haben gesehen diese Regel beliebig oft auf ein und dieselbe Formel (∀x) A(x) angewandt werden kann (und oft auch muß), denn wenn (∀x) A sein soll, dann müssen auch alle Instanzen A(t) wahr sein, wo t Name eines beliebigen Objekts in dem Modell M ist, das wir zu f versuchen, indem wir für das Argument ein Semantisches Table konstruieren. Bisher waren die einzigen Namen von Objekten d Individuenkonstanten (oder "Parameter") und deshalb war es a möglich der Intuition gerecht zu werden, auf der die Regel basi indem nur solche "Namen" für x substituiert wurden. Sobald al Funktoren in den Prädikatenkalkül aufgenommen werden, habe neben diesen "atomaren Namen" auch "komplexe Namen", die si ergeben wenn Funktoren mit Individuenkonstanten kombiniert Ist zum Beispiel a eine Individuenkonstante und f eine einstelli Funktionskonstante, dann bezeichnen auch f(a), f(f(a)), f(f(f(a))) Objekte; soll (∀x) A(x) in M wahr sein, dann muß sichergestellt v daß A(x) auch für die Objekte gilt, die durch solche "Namen" be werden. Also muß die Regel (∀,L) jetzt dahingehend umformulie werden, daß auch komplexe Terme für die vom All-Quantor geb Variable substituiert werden.

Daß eine solche Neuformulierung der Regel (∀x) A(x) in der Tat notwendig ist, zeigt folgendes Beispiel.

(69) $(\forall x)\ (P(x) \rightarrow (P(f(x)) \vee P(g(x))) \vdash$
$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow (P(f(f(x))) \vee P(g(f(x))) \vee P(f(g(x))) \vee P(g(g(x)$

(Eine mögliche Interpretation dieses Arguments ist wie folgt: "P(bedeutet "x hat braune Augen", f(x) ist der Vater von x und g(x) Mutter von x. Dann besagt die Prämisse, daß jeder, der braune hat, entweder einen Vater mit braunen Augen oder eine Mutter braunen Augen hat, und der Schluß besagt, daß wenn jemand l Augen hat, dieses entweder für einen seiner beiden Großväter c eine seiner beiden Großmütter der Fall sein muß. Diese Interpr der in (69) vorkommenden Prädikate und Funktoren sollte es l machen, zu erkennen, daß das Argument gültig ist.)

(70) zeigt den Anfang einer Tableaukonstruktion für (6). In de gezeigten Tableaukonstruktion wurden soweit nur die Regeln angewandt, wie wir sie bis zum Ende des letzten Abschnitts for hatten.

```
(70)              WAHR                              FALSCH
                                           ||
   (∀x) (P(x) → (P(f(x)) v P(g(x)))   || (∀x) (P(x) → (P(f(f(x))) v P(g(f(
                                           ||               P(f(g(x))) v P(g(g(x)))))

                                               P(a)  → (P(f(f(a))) v P(g(f(a))) v
                                                             P(f(g(a))) v P(g(g(a))))

                  P(a)                                       P(f(f(a))) v P(g(f(a))) v
                                                             P(f(g(a))) v P(g(g(a)))

                                                                  P(f(f(a)))
                                                                  P(g(f(a)))
                                                                  P(f(g(a)))
                                                                  P(g(g(a)))
      P(a) → (P(f(a)) v P(g(a)))

        |     P(f(a)) v P(g(a))  ||      P(a)|
======|  P(f(a))   |P(g(a))   ||=========|             |
```

Mit (70) ist aber ein Punkt der Tableaukonstruktion erreicht w dem die bisherigen Regeln uns nicht weiterhelfen. Damit wir in beiden noch offenen Ästen einen Abschluß erreichen, müssen w Regel (∀,L) abermals auf die Prämisse von (69) anwenden - einm linken und einmal im rechten Ast, und zwar so, daß wir für x in Ast f(a) und im rechten Ast g(a) einsetzen. Auf diese Weise brin auch diese Äste zum Abschluß. Dies ist im nächsten Diagramm (gezeigt (in dem wir nur die noch offenen Äste von (70) aufgefü haben).

```
(71)       WAHR                                 FALSCH
                                          ||
   (∀x) (P(x) → (P(f(x)) v P(g(x)))       || (∀x) (P(x) →
                                          ||    (P(f(f(x))) v P(g(f(x))) v
                                          ||      P(f(g(x))) v P(g(g(x)))))
                                          ||
                                          || P(a) → (P(f(f(a))) v P(g(f(a))) v
                                          ||          P(f(g(a))) v P(g(g(a))))
                                          ||
                 P(a)                     ||         P(f(f(a))) v P(g(f(a))) v
                                          ||          P(f(g(a))) v P(g(g(a)))

                                                         P(f(f(a)))
                                                         P(g(f(a)))
                                                         P(f(g(a)))
                                                         P(g(g(a)))


      P(a) → (P(f(a)) v P(g(a))          ||
                                         ||
           P(f(a)) v P(g(a))               ||
      P(f(a))            P|(g(a))          ||           |
                        |                  ||           |
P(f(a)) →               | P(g(a)) →            ||       |
   (P(f(f(a))) v           |    (P(f(g(a))) v       ||  |
        P(g(f(a))))    |       P(g(g(a))))       ||     |
                        |                    ||         |
    | P(f(f(a))) v     |     |               || P(f(a)|   | P(g(a))  |
===|     P(g(f{a)}))     |===|               ||=====|    |======= |___.
P(f(f(a)))| P(g(f(a))) | P(f(g(a))) |P(g(g(a)))| ||   |          |
========|==========|======== |=========||======|======|========|=
```

Für die Umformulierung der Regel (∀,L), welche die Anwendunge (71) rechtfertigt, brauchen wir den Begriff eines geschlossenen Der Begriff eines Terms der Prädikatenlogik mit Funktionskonst wurde schon definiert, als wir die Funktionskonstanten zum er Mal einführten. (Siehe Teil I, S. 122). Wir erinnern noch einmal dort gegebene Definition:

<u>Def</u>. (i) eine Variable ist ein Term;
     (ii) eine Individuenkonstante ist ein Term;

---

[3] Wir werden diesen Begriff ebenso bei der Neuformulierung der drei anderen auf S, 55 erwähnten Regeln verwenden.

(iii) wenn f eine n-stellige Funktionskonstante ist und $t_1,...,$ sind Terme, so ist auch $f(t_1,...,t_n)$ ein Term.

Die geschlossenen Terme sind diejenigen Terme, deren Bezeichn unabhängig von der Variablenbelegung ist. Es ist leicht einzuse dies genau die Terme sind, die keine Variablen enthalten -Term anderen Worten, welche ausschließlich aus Individuenkonstant Funktoren bestehen.

<u>Def</u>. Ein geschlossener Term ist ein Term, der keine Variablen e

Die Neuformulierung der Regel ($\forall$,L) ist jetzt klar:

Kommt die Formel $(\forall x)A(x)$ unter "Wahr" vor, und t ist ein belie geschlossener Term, dann ist auch die Formel A(t) unter "Wahr" einzutragen, wobei A(t) das Ergebnis, das man erhält, wenn in A freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Solche Neuformulierungen sind nötig für jede der auf S. 55 erw Regeln. An den nächsten beiden Beispielen wird dies für die Identitätsregeln (=, Sub) und (=, Ref) gezeigt.

Bevor wir uns den Beispielen selbst zuwenden, definieren wir z den Begriff eines Zyklus (einer einer einstelligen Funktion), auf sich beziehen.

Def. Sei F eine einstellige Funktion mit Argumentbereich U und Wertbereich $\subseteq$ U.

Ein Zyklus von F von der Länge n ist eine Menge von n Ele $a_1, ..., a_n$ im Argumentbereich von F, so daß gilt:
(i) für $i = 1, .. , n-1$, $a_{i+1} = F(a_i)$; und
(ii) $a_1 = F(a_n)$

F heißt zyklisch (mit Periodizität n), wenn jedes Element a i Argumentbereich von F einem F-Zyklus (von Länge n) ange

(Insbesondere ist also die Identitätsfunktion auf einer Meng einzige Funktion mit Argumentbereich X, die zyklisch mit Periodizität 1 ist.)

Im allgemeinen gilt: Wenn F zyklisch ist mit Periodizität n und zyklisch mit Periodizität m, dann ist F auch zyklisch mit Periodi wo k der größte gemeinsame Teiler von n und m ist. Ein beson davon ist der, in dem n und m keinen gemeinsamen Teiler auß haben. In dem Fall ist F die Identität (auf seinem Argumentbe Umgekehrt gilt, daß wenn F zyklisch mit Periodizität k ist und n durch k teilbar, dann F ebenfalls zyklisch ist mit Periodizität n.

Unser erstes Beispiel zeigt, daß es notwendig ist, die Regel (=,Sub formulieren. Wir betrachten den Fall einer Funktion, die sowoh zyklisch mit Periodizität 5 als auch zyklisch mit Periodizität 7 ist n = 5, m = 7. Wenn wir annehmen, daß F eine Funktion ist, dere Argumentbereich das ganze Universum umfaßt, dann lassen sic Annahmen, daß F zyklisch mit Periodizität 5 und zyklisch mit Periodizität 7 ist, wie folgt in der Prädikatenlogik ausdrücken:

(72) $(\forall x)\ f(f(f(f(f(x))))) = x$

(73) $(\forall x)\ f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$

Aus den obigen Beobachtungen über Zyklen folgt, daß das Argu

(74) $(72), (73) \models (\forall x)\ f(x) = x$

gültig ist. Wir wollen die Gültigkeit durch Konstruktion eines geschlossenen tableaus beweisen. (75) ist die Ausgangssituation Tableaukonstruktion.

(75)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(x))))) = x$	$(\forall x)(f(x) = x)$
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	

Wir starten die Konstruktion mit einer Instanziierung der $\forall$-For der rechten Seite. Dabei führen wir den neuen Parameter a ein Anschließend instanziieren wir die beiden $\forall$-Formeln auf der li Seite mit a:

(76)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(x))))) = x$	$\forall x)(f(x) = x)$
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	
	$f(a) = a$
$f(f(f(f(f(a))))) = a$	
$f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a$	

Wir können nun die Regel (=,Sub) anwenden, indem wir "f(f(f(f(f(a))))) = a" als die für die Regel notwendige Identität u "f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a" als die Formel A betrachten, in der wir Teilterm f(f(f(f(f(a))))) des Terms "f(f(f(f(f(f(f(a)))))))" durch "a" ersetzen. Die Formel A', die sich daraus ergibt, ist "f(f(a)) = a":

(77)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(x))))) = x$	$\forall x)(f(x) = x)$
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	
	$f(a) = a$
$f(f(f(f(f(a))))) = a$	
$f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a$	
$f(f(a)) = a$	

Wir können nun die neue Formel "f(f(a)) = a":als Identität in ei weiteren Anwendung von (=, Subst) verwenden, in der jetzt "f(f(f(f(f(a))))) = a" die Rolle der Formel A spielt. Ersetzung von durch a in dieser Formel ergibt "f(f(f(a))) = a". Eine dritte Anw der Regel, in der wir f(f(a)) in dieser letzten Formel durch a ers ergibt "f(a) = a" auf der linken Seite und diese bringt das Table Abschluß:

(78)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(x))))) = x$	$\forall x)(f(x) = x)$
$(\forall x)\ f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	
	$f(a) = a$
$f(f(f(f(f(a))))) = a$	
$f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a$	
$f(f(a)) = a$	
$f(f(f(a))) = a$	
$f(a) = a$	

===

Die zweite Beobachtung, die wir oben über Zyklizität machten, illustrieren wir an dem Fall, in dem k = 2 und n = 4 ist. Wir be also das Argument

(79) $(\forall x)\ f(f(x)) = x \models (\forall x)\ f(f(f(f(x)))) = x.$

Das Tableau sieht, nachdem man die Quantorenformeln reduzie etwa so aus:

(80)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ f(f(x)) = x$	$(\forall x)\ f(f(f(f(x)))) = x$
	$f(f(f(f(a)))) = a$
$f(f(a)) = a$	

Den Abschluß des Tableaus erreichen wir, indem wir die Formel = a" als Identität und die Formel " f(f(f(f(a)))) = a" auf der recht als Formel A verwenden. Ersetzung des Teilterms f(f(a)) durch a dieser Formel ergibt auf der rechten Seite die Formel "f(f(a)) = a damit den Tableauabschluß:

(81)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ f(f(x)) = x$	$(\forall x)\ f(f(f(f(x)))) = x$
	$f(f(f(f(a)))) = a$
$f(f(a)) = a$	
	$f(f(a)) = a$

==

Eine auf den ersten Blick triviale Variante des letzten Argument erhalten wir, indem wir in Prämisse und Schluß die Terme links rechts vom Gleicheitszeichen vertauschen:

(82) $(\forall x)\ x= f(f(x)) \models (\forall x)\ x= f(f(f(f(x))))$.

Nehmen wir an, die Tableakonstruktion hat den in (83) gezeigt erreicht.

(83) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ x = f(f(x))$	$(\forall x)\ f(f(f(f(x)))) = x$
	$a = f(f(f(f(a))))$
$a = f(f(a))$	

Wie sollen wir weiterverfahren? Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, (83) zum Abschluß zu bringen. Die erste besteht daß wir die Gleichung auf der linken Seite wieder umdrehen. D können wir dadurch erreichen, daß wir zuerst die Regel (=, Ref) anwenden, indem wir links die Formel "a = a" eintragen, und anchließend die Formel "a = a" als Formel A in einer Anwendung (=,Sub) einsetzen, die "a = f(f(a))" als Gleichung verwendet und Vorkommen von a in "a = a" durch f(f(a)) ersetzt. Danach verfa dann wie in der Tableaukonstruktion für (79):

(84) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ x = f(f(x))$	$(\forall x)\ f(f(f(f(x)))) = x$
	$a = f(f(f(f(a))))$
$a = f(f(a))$	
$a = a$	
$f(f(a)) = a$	
	$a = f(f(a))$

Die zweite Möglichkeit besteht darin, daß wir die Regel (=, Subst anwenden und dabei die Formel "a = f(f(a)" eine doppelte Rolle lassen - einerseits die der Gleichung und andererseits die der F In ihrer Rolle als Gleichung erlaubt die Formel es, in ihr selbst (Rolle von A) den Teilterm "a" auf der rechten Seite durch "f(f(a) ersetzen. So erhalten wir auf der linken Seite die Formel "a = f(f(f(f(a))))" und damit schließt sich das Tableau:

(85) WAHR FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\forall x)\ x = f(f(x))$	$(\forall x)\ f(f(f(f(x)))) = x$
	$a = f(f(f(f(a))))$
$a = f(f(a))$	
$a = f(f(f(f(a))))$	

===

Eine dritte Möglichkeit ergibt die bisher noch nicht benutzte Op Regel (=,Ref) in ihrer erweiterten Formulierung anzuwenden, die erlaubt, Formeln von der form "t = t" für beliebige (auc komple: Terme t in die Wahrspalte einzutragen. Insbesondere erlaubt c HInzufügen von "f(f(a)) = f(f(a))" auf der "Wahr"-Seite von (83). können diese Formel nun als die Formel A in einer Anwendung (=, Sub) verwenden, bei der "a = f(f(a))" die Rolle der Gleichung Diese Anwendung lergibt links die Formel f(f(a)) = f(f(f(f(a)))). \ wenden dann die Regel (=, Sub) nochmal an, indem "a = f(f(a))" Rolle der Formel A übernimmt, während "f(f(a)) = f(f(f(f(a))))" a Gleichung fungiert. In dieser Anwendung ersetzen wir den Terı in "a = f(f(a))" durch f(f(f(f(a)))), und erzielen damit wiederum Tableau-Abschluß:

(86)	WAHR	FALSCH
	$(\forall x)\ x = f(f(x))$	$(\forall x)\ f(f(f(f(x)))) = x$
		$a = f(f(f(f(a))))$
	$a = f(f(a))$	
	$f(f(a)) = f(f(a))$	
	$f(f(a)) = f(f(f(f(a))))$	
	$a = f(f(f(f(a))))$	

===

Das Tableau (83) konnten wir zum Abschluß zu bringen, ohne v erweiterten Formulierung der Regel (=, Ref) Gebrauch zu machen der Formeln "t = t" mit komplexen Termen t unter "Wahr" eing werden dürfen. Aber auf diese Erweiterung können wir nicht verzichten. Denn wie könnte sonst die logische Gültigkeit von F = t" mit komplexem t nachgewiesen werden? Betrachten wir z.B. Tableau für das "Argument" $\vdash f(a) = f(a)$:

(87)	WAHR	FALSCH
		$f(a) = f(a)$

Bestünde nicht die Möglichkeit, "f(a) = f(a)" (als Anwendung von (=, Ref)) links einzutragen, so gäbe es auch keine andere Möglic das Tableau (87) zum Abschluß zu bringen, denn für keine der Konstruktionsregeln gibt es in (83) eine Anwendungsgelegenhei

##

Es sei nochmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Neuformulierung, nach der nicht nur Parameter sondern beliet geschlossene Terme verwendet werden dürfen, nur die vier obe erwähnten Regeln - (∀,L), (∃,R), (=, Sub) und (=, Ref) - betreffen. Quantorenregeln (∃,L) und (∀,R) sind in ihrer ursprünglichen Fo behaupten: Nach wie vor gilt hier, daß ein neuer, "unbelasteter für die quantifizierte Variable einzusetzen ist. Dafür kommen n Individuenkonstanten in Betracht. Würden wir z.B. bei der Red einer Existenzformel (∃x) A(x) unter "Wahr" einen Term f(a) ein so würden wir damit eine nicht gerechtfertigte Information in Tableau einschmuggeln - und zwar auch in dem Fall, wo der P a bis dahin noch nicht im Tableau vorkam. Denn die Möglichkei Objekt b mit einem Term von der Form f(a) zu bezeichnen, best dann, wenn b zum Wertbereich der Funktion f gehört. Indem v für x in (∃x) A(x) einsetzen, würden wir also damit implizit beh daß A(x) von einem Objekt im Wertbereich dieser Funktion erfü Es ist aber möglich, daß das Prädikat A(x) nur von Objekten erfü die außerhalb des Wertbereichs von f liegt. Mit der Substitution würde man diese Möglichkeit zu Unrecht aussschließen.

Zum Abschluß dieser Darstellung der Tableaumethode für die Prädikatenlogik mit Funktionskonstanten geben wir die Neuformulierungen der Regeln (∀,L), (∃,R), (=, Sub) und (=, Ref) in schon erprobten, diagrammatischen Form. Wie sich unmittelba erkennen läßt, reduzieren sich diese Formulierungen auf die vo wenn sie auf prädikatenlogische Sprachen ohne Funktionskons bezogen werden. Denn in solchen Sprachen sind die Individuenkonstanten die einzigen geschlossenen Terme.

Um den Unterschied zwischen den Quantorenregeln (∀,L) und (∃, einerseits und den (unveränderten) Quantorenregeln (∃,L) und nochmal besonders hervorzuheben, wiederholen wir auch die noch einmal.

(88)

$(\forall,L)$ WAHR | FALSCH $(\forall,R)$

WAHR: $$\frac{(\forall v_i)\ A}{A(t/v_i)}$$ (t beliebiger geschlossener Term)

FALSCH: $$\frac{(\forall v_i)\ A}{A(c/v_i)}$$ (c neuer Parameter)

$(\exists,L)$ WAHR | FALSCH $(\exists,R)$

WAHR: $$\frac{(\exists v_i)\ A}{A(c/v_i)}$$ (c neuer Parameter)

FALSCH: $$\frac{(\exists v_i)\ A}{A(t/v_i)}$$ (t beliebiger geschlossener Term)

(=,Sub) WAHR FALSCH WAHR FALSCH

$$\frac{s = t \qquad A}{A'} \qquad\qquad \frac{s = t \qquad\qquad A}{A'}$$

(s, t beliebige, geschlossene Terme; A' ergibt sich aus A durch E
von t für ein oder mehrere Vorkommen von s in A.)

(=, Ref) WAHR FALSCH (=, Ref)

$$\frac{}{t = t}$$

(t ein beliebiger geschlossener Term)

B Andere Typen von Beweisverfahren.

1. Der Sequenzenkalkül.

Aus semantischer Sicht ist die Tableaumethode ein sehr natürli Beweisverfahren. Ein Argument $A_1, \ldots, A_n \models B$ ist nach unserer semantischen Definition gültig, wenn es kein Modell gibt, in dem A_n wahr sind und B falsch. Um zu beweisen, daß das Argument ist, muß also gezeigt werden, daß es kein solches Modell gibt. Di Tableaumethode tut genau das, und sie ist im Prinzip in der La besteht die Vollständigkeit der Methode - für jedes gültige Arg einen solchen Beweis zu liefern. Auch entspricht die Methode (Erfinder der Tableaumethode Beth immer wieder betont hat) e Vorgehensweise, nach der man innerhalb der Mathematik oft t verfährt: Um festzustellen, ob eine Hypothese, die er für möglic warscheinlich hält, in der Tat stimmt, überlegt sich der Mathen wie eine mathematische Struktur, in der die Vorbedingungen d Hypothese erfüllt sind, aber die von ihr gemachte Aussage nich aussehen könnte. Kommt er dabei zu dem Schluß, daß es eine s Struktur nicht gibt, dann ist damit der Beweis, daß die Hypothe stimmt, im Grunde geliefert.

Dennoch beläßt man es in der Mathematik bei der Feststellung, kein Gegenbeispiel zu einer Hypothese geben kann, oft nicht. D Mathematiker sieht es meistens als eine zusätzliche Aufgabe, a dieser Feststellung einen "direkten" Beweis zu konstruieren, der Prämissen über eine Kette von Inferenzen schrittweise zum erwünschten Schluß führt. Diese Ableitungskette ist dann der "eigentliche Beweis", und es sind diese "eigentlichen Beweise", di meist in Veröffentlichungen mathematischer Ergebnisses finden Von einem Beweis solcher Art, der von den Prämissen ausgehen eine Anzahl von Zwischenergebnissen zum Endergebnis voransc ist die Tableaumethode ihrer Form nach recht weit entfernt.

Mit Beweisverfahren, die den Schluß aus den Prämissen ableiten beschäftigt sich die Logik schon seit der Antike. Wir haben dies Aspekt der Logik kurz gestreift, als im ersten Teil die Aristotelis Syllogismuslehre besprochen wurde. Wie wir dort sahen, kann Syllogismusregeln - wie z. B. die Regel, welche besagt, daß wenn Bs und alle Bs Cs sind, dann auch alle As Cs sind, oder die Regel Form: "Wenn es etwas gibt, das sowohl A und B ist, und alle Bs si dann gibt es ein A, das auch ein C ist." - miteinander kombinier auf diese Weise neue komplexere Syllogismusschemata begründe Beispiel liefert die sukzessive Anwendung der beiden gerade ge Regeln das Schema: Wenn es ein A gibt, daß auch ein B ist und a sind Cs und alle Cs sind Ds, dann gibt es etwas, das sowohl ein A ein D ist.

Die Verkettung von Syllogismusschemata führt aber nicht sehr Denn der Syllogismusformalismus ist, wie wir gesehen haben, ni besonders ausdrucksfähig. (Sie entspricht einem eher bescheid Fragment der Monadischen Prädikatenlogik.) Die Entwicklung v anspruchsvolleren Deduktionsverfahren, die den Ansprüchen d Mathematik eher gerecht werden, wurde erst dann möglich, als Logik durch Frege und Peirce mit dem Prädikatenkalkül ihre gewissermaßen endgültige Form gefunden hatte. Obwohl solche Deduktionsverfahren im Vergleich zu den Ansätzen innerhalb d Aristotelischen logik also noch recht jung sind, so ging ihre Forı - die ja ein wesentlicher Teil der Formulierung des Prädikatenk überhaupt ausmachte - der Erfindung der Tableaumethode im um mehr als ein halbes Jahrhundert voraus. Seit den ersten Deduktionssystemen für die Prädikatenlogik, die wir vor allem Russell und Whitehead verdanken und die aus dem Ende des le und dem Anfang dieses Jahrhunderts datieren, ist inzwischen e schillernde Vielfalt an Systemen entwickelt worden, die zwar all Grundarchitektur eines Ableitungssystems haben, sich dennoch manchaml ganz wesentlich voneinander unterscheiden. Auf de folgenden Streifzug durch die Landschaft der prädikatenlogisch Beweistheorie werden wir einige dieser Systeme kennenlernen.

Zwischen diesen Systemen und der Tableau-Methode gibt es systematische Zusammenhänge. Ein besonders klarer Zusamma besteht zwischen der Tableaumethode und dem sogenannten Sequenzenkalkül, der in den dreißiger Jahren von dem deutsch Mathematiker und Logiker Gerhard Gentzen (1909 - 1945) entv wurde.

Ein erster Eindruck des Sequenzenkalküls läßt sich am Besten an eines Beispiels vermitteln, Wir betrachten ein gültiges Argument recht einfaches Argument des Aussagenkalküls eignet sich zu d Zweck am Besten - und transformieren das geschlossene Tableau dieses Argument in eine Ableitung des Sequenzenkalküls.

(89) $p \,\&\, (q \vee r) \vdash (p \,\&\, q) \vee r$

```
(90)      WAHR                               FALSCH

          p & (q v r)                        (p & q) v r
                                               p & q
                                                r
          p
          q v r
___________________________|___________________________
          |               |         p    |     q
==========               ==============
                          |
___________________________|___________________________
     q      |      r      |          |
====================================================
```

Unsere Begründung, wieso der Tableau-Abschluß als Nachweis d Gültigkeit des Ausgangsarguments betrachtet werden darf, sah s Das Tableau stellt eine systematische Suche nach einem Gegenb dar. Bei dieser Suche werden alle Möglichkeiten verfolgt - jeder Möglichkeit entspricht ein Ast des Tableaus. Schließt sich ein Ast bedeutet dies, daß die von ihm repräsentierte Suche zum Wide führt. Denn zum Abschluß kommt das Tableau ja nur dann, we dieselbe Formel sowohl unter "Wahr" als unter "Falsch" im Ast vorkommt, was besagt, daß sie in dem entsprechenden Gegenbe sowohl wahr als auch falsch sein müßte; ein solches Gegenbeispi es aber offensichtlich nicht geben. Sind alle Äste des Tableaus geschlossen, dann gibt es also überhaupt kein Gegenbeispiel unc geschossen werden, daß das Argument gültig ist.

Man kann diese Rechtfertigung auch anders formulieren. Ein geschlossener Ast läßt sich selbst als ein Argument interpretier dessen Gültigkeit direkt erkennbar ist. Betrachten wir z.B. den s (87) ganz links befindenden Tableau-Ast, der sich schon gleich dem zweiten Reduktionsschritt schloß. In diesem Ast kommen Formeln p & (q v r), p, q v r unter "Wahr" und die Formeln (p & p & q, r, p unter "Falsch" vor. Mit diesen zwei Formelmengen k wir das Argument assoziieren, dessen einzige Prämisse die Konj der Formeln in der ersten und dessen Schluß die Disjunktion de Formeln in der zweiten Menge ist:

(91) (p & (q v r)) & p & (q v r) ⊢ ((p & q) v r) v (p & q) v r v

Daß dieses Argument gültig ist, erkennt man direkt daran, daß konjunktiven Prämisse und dem disjunktiven Schluß ein Glied (p) gemeinsam ist. Daß ein solches Argument gültig sein muß, ist Denn ist M eine Bewertung, die die Prämisse wahr macht, dann sie insbesondere auch das Konjunkt p dieser Prämisse wahr. Da dann aber der Schluß, der p als Disjunkt enthält, ebenfalls in M (92) gibt eine allgemeine Formulierung dieses Prinzips:

(92)(Axiom des Sequenzenkalküls)

Sei

$$A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; C \;\&\; \ldots. \;\&\; A_n \vdash B_1 \vee \ldots \vee C \vee \ldots. \vee B_m$$

ein Argument, dessen einzige Prämisse eine Konjunktion un dessen Schluß eine Disjunktion ist, und in dem ein und dies Formel zugleich als ein Konjunkt der Prämisse und als ein I des Schlußes auftritt. Dann ist dieses Argument gültig.

Offensichtlich ist mit jedem geschlossenen Ast eines semantisch Tableaus ein gültiges Argument von dem in (92) beschriebenen assoziiert. Insbesondere ergeben die beiden anderen Äste von Argumente

(93) (p & (q v r)) & p & (q v r) & q ⊢ ((p & q) v r) v (p & q) v r

(94) (p & (q v r)) & p & (q v r) & r ⊢ ((p & q) v r) v (p & q) v r

((93) ist gültig, weil q links als Konjunkt und rechts als Disjunkt (94) ist gültig wegen der beiderseitigen Präsenz der Formel r.)

Argumente dieser Form, in der die einzige Prämisse die Form ei Konjunktion A_1 & .... & A_n und der Schluß die Form einer Disjun B_1 & .... & B_m hat, haben in den folgenden Überlegungen, sowie i Sequenzenkalkül überhaupt, einen zentralen Stellenwert. Es gib besondere Notation für solche Argumente, in der die Konjunkte Prämisse und die Disjunkte des Schlußes durch Kommata vonei getrennt werden (statt durch & bzw. v). Z. B. sehen (93) und (9 dieser Notation wie folgt aus:

(95) (p & (q v r)), p, (q v r), q ⊢ ((p & q) v r), (p & q), r, q

(96) (p & (q v r)), p, (q v r), r ⊢ ((p & q) v r), (p & q), r, q

Ein Vorzug dieser Notation ist es, die im Rahmen des Sequenzen wichtige Symmetrie zwischen den Formeln auf der Prämissensei denen auf der Schlußseite besonders hervorzuheben.

Betrachten wir nun den letzten in der Konstruktion von (90) durchgeführten Reduktionsschritt, der zu den beiden Ästen füh die die entsprechenden Argumente in (93) und (94) bzw. (95) dargestellt sind. In diesem Schritt wurde die Formel q v r auf der linken Seite reduziert. Auch dem Tableau-Ast, in dieser Reduktionsschritt durchgeführt wurde, entspricht ein A dessen Prämisse die Konjunktion der Formeln, die sich unmittel dem Reduktionsschritt in der "Wahr"-Spalte befanden und des Schluß die Disjunktion der Formeln ist, diezu diesem Zeitkunkt a "Falsch"-Seite vorkamen. In der neuen Notation, in der wir statt v Kommata verwenden, hat dieses folgende Gestalt:

(97) p & (q v r), p, q v r ⊦ (p & q) v r, p & q, r, q

Ist (97) gültig? Die Antwort auf diese Frage ist natürlich positiv läßt sich wie folgt begründen. Die Prämissenmenge von (97) be der Disjunktion q v r, die beim unmittelbar folgenden Reduktic in ihre Disjunkte zerlegt wird, sowie aus noch zwei weiteren Prä Den zwei Ästen, die durch den Reduktionsschritt entstehen, en wie soeben bemerkt, die Argumente (95) und (96). Diese unte sich von (97) dadurch, daß das Argument (95) nebst der Prämis auch noch das erste Disjunkt q von dieser Disjunktion als Prämi enthält, während in dem Argument (96) an gleicher Stelle das z Disjunkt r vorkommt. Aufgrund dieser Beziehung zwischen (97) und (96) läßt sich nun leicht argumentieren, daß wenn die beic letzteren Argumente gültig sind, auch das erste gültig sein muß. Überlegung hat die folgende allgemeine Form.

(98) Um zu zeigen, daß aus einer Disjunktion C v D und weiteren Prämissen A_1, ..., A_n der Schluß B folgt, reicht es aus, zu zeig daß B einerseits aus A_1, ..., A_n, C v D zusammen mit C und andererseits aus A_1, ..., A_n, C v D zusammen mit D folgt. Den die beiden letzteren Argumente gültig, so muß auch das ursprüngliche Argument gültig sein. Wäre nämlich das ursprüngliche Argument nicht gültig, dann würde es ein Gegenbeispiel geben, in dem der Schluß B falsch und die Pr A_1, ..., A_n, C v D wahr sind. In einem solchen Gegenbeispiel dann insbesondere C v D wahr, und so müßte dort auch en oder D wahr sein. Im ersten Fall hätten wir dann aber ein

Gegenbeispiel gegen das Argument $A_1, ..., A_n, C \vee D, C \vdash B$, wa wegen der Gültigkeit dieses Arguments ausgeschlossen ist, u zweiten Fall hätten wir ein Gegenbeispiel gegen $A_1, ..., A_n, C \vee D, D \vdash B$, was ebenfalls ausgeschlossen ist.

Aufgrund von (98) und der schon gemachten Beobachtung, daß (96) gültig sind, können wir schließen, daß auch (97) gültig ist.

Wir können das Prinzip (98) als eine Inferenzregel für Gültigkeitsbhauptungen betrachten. Die Regel läßt sich schemat in (99) darstellen.

(99)
$$\frac{A_1, ..., A_n, C \vee D, C \vdash B_1, ..., B_m \qquad A_1, ..., A_n, C \vee D, D \vdash B_1, ..., B_m}{A_1, .., A_n, C \vee D \vdash B_1, ..., .B_m}\ (\vee, L)$$

Paraphrasieren kann man diese Regel entweder wie in (100) od (101)

(100) Wenn die Argumente $A_1, ..., A_n, C \vee D, C \vdash B_1, ..., B_m$ und $A_1, ..., A_n, C \vee D, D \vdash B_1, ..., B_m$ beide gültig sind, dann ist au Argument $A_1, .., A_n, C \vee D \vdash B_1, ..., B_m$ gültig.

(101) Wenn man $B_1 \vee ... \vee B_m$ aus $A_1 \& .. \& A_n \& (C \vee D) \& C$ ableite kann und man kann ebenfalls $B_1 \vee ... \vee B_m$ aus $A_1 \& .. \& A_n \& (C \vee D) \& D$ ableiten, dann ist damit nachgewie daß $B_1 \vee ... \vee B_m$ auch aus $A_1, .., A_n, C \vee D$ ableitbar ist. Also dürfen zwei Ableitungen der beiden ersten Argumente zu als Ableitung des dritten Arguments betrachtet werden.

Die bisherigen Überlegungen haben uns zu dem Schluß geführt, Argumente (97) und (102) (das Argument (91) in neuer Notati

(102) $(p \& (q \vee r)), p, q \vee r \vdash (p \& q) \vee r, (p \& q), r, p$

beide gültig sind. Betrachten wir nun den Reduktionsschritt, de beiden Tableau-Ästen führte, denen diese beiden Argumente entsprechen. Dieser Schritt reduzierte die Formel p & q in der Spalte. Dem Tableauzustand, der unmittelbar vor diesem Schrit bestand, entspricht folgendes Argument:

(103) p & (q v r), p, q v r $\vdash$ (p & q) v r, p & q, r

Wie im letzten Fall argumentieren wir, daß dieses Argument gül muß, weil die beiden Argumente (102) und (97) gültig sind. Da entsprechende Prinzip - "wenn aus A_1, .., A_n einerseits die Disju B_1 v ...v B_m v (C & D) v C und andererseits die Disjunktion B_1 v ...v.B_m v (C & D) v D folgt, dann folgt auch die Disjunktion B_1 B_m v (C & D) aus A_1, .., A_n" - findet sich schematisch in (104)

(104)

$$\frac{A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m, C \,\&\, D, C \qquad A_1, .., A_n \vdash B_1, ..., B_m, C \,\&\, D, D}{A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m, C \,\&\, D}$$

Da schon gezeigt wurde, daß (102) und (97) beide gültig sind, e (104) den Schluß, daß auch (103) ein gültiges Argument ist.

Dem gerade besprochenen Reduktionsschritt ging der Schritt vo dem die Konjunktion p & (q v r) unter "Wahr" auf ihre beiden p und q v r reduziert wird. Dieser Schritt wir durch folgendes gerechtfertigt:

> Ist ein Argument von der Form A_1, ..., A_n, C & D, C, D $\vdash$ B_1,.., E gültig, dann ist auch das Argument A_1, ..., A_n , C & D $\vdash$ B_1, .. gültig.

In der uns schon von (99) und (104) bekannten schematischen sieht dieses Prinzip wie folgt aus

(105)

$$\frac{A_1, .., A_n, C \,\&\, D, C, D \vdash B_1, ..,.B_m}{A_1, .., A_n, C \,\&\, D \vdash B_1, ..,.B_m}\,(\&,L)$$

Wenden wir (105) auf das schon als gültig erkannte Argument so ergibt sich, daß auch (106) gültig ist

(106) p & (q v r) $\vdash$ (p & q) v r, p & q, r

Aus der Gültigkeit von (106) läßt sich zuletzt die Gültigkeit des ursprünglichen Arguments (89) ableiten. Dazu beziehen wir un

ersten Reduktionsschritt im Tableau (90), in dem die Formel (p ‹
unter "Falsch" in ihre Disjunkte p & q und r zerlegt wurde. Die
entsprechende Regel, die die Gültigkeit des Arguments, welches
Ausgangstableau assoziiert ist, zurückführt auf die Gültigkeit de
Arguments, das sich aus der Regelanwendung ergibt,, ist (107):

(107) $$\frac{A_1, .., A_n \vdash B_1, .,.B_m, C \vee D, C, D}{A_1, .., A_n \vdash B_1, .,.B_m, C \vee D}\ (\vee,R)$$

Obwohl in (90) nicht alle Tableauregeln des Aussagenkalküls ins
kommen, dürfte die detaillierten Diskussion des Beispiels doch
gemacht haben, daß es für jede Tableau-Regel R ein entspreche
Prinzip P_R des Sequenzenkalküls gibt. Genauer gesagt: Für jede
Tableauregel R gibt es ein Prinzip P_R, die zu R in folgendem Verl
steht: Sei Z ein Tableau-Ast und sei Z' der Ast (bzw. Z' und Z'' die
der sich durch Anwendung von R auf eine Formel in Z ergibt (bz
sich daraus ergeben); seien A und A' (bzw. A' und A''), die diese
entsprechenden Argumente. Das Prinzip P_R besagt, daß die Gül
von A aus der von A' (bzw. von A' und A'') folgt.

Es ist nicht schwer, die noch fehlenden Prinzipien zu formulieren
sind unter (108) - (113) aufgelistet

(108) $$\frac{A_1, ..., A_n, \neg C \vdash B_1, ..., B_m, C}{A_1, ..., A_n, \neg C \vdash B_1, ..., B_m}\ (\neg,L)$$

(109) $$\frac{A_1, ..., A_n, C \vdash B_1, ..., B_m, \neg C}{A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m, \neg C}\ (\neg,R)$$

(110) $$\frac{A_1, ..., A_n, C \rightarrow D \vdash B_1, ..., B_m, C \quad A_1, ..., A_n, C \rightarrow D, D \vdash B_1, ..., B}{A_1, .., A_n, C \rightarrow D \vdash B_1, .,.B_m}$$

(111) $$\frac{A_1, .., A_n, C \vdash B_1, .,.B_m, C \rightarrow D, D}{A_1, .., A_n \vdash B_1, .,.B_m, C \rightarrow D}\ (\neg,R)$$

(112) $A_1, .., A_n, C \leftrightarrow D, C, D \vdash B_1,.., B_m \quad A_1, .., A_n, C \leftrightarrow D \vdash B_1, .., B_m, C$

____

$A_1, .., A_n, C \leftrightarrow D \vdash B_1, .,.B_m$

(113) $A_1, .., A_n, C \vdash B_1,..., B_m, C \leftrightarrow D, D$ $A_1,..., A_n, D \vdash B_1,..., B_m, C \leftrightarrow$ I

____

$A_1, .., A_n \vdash B_1,.., B_m, C \leftrightarrow D$

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt formulierten Regeln können w jedes Argument der Aussagenlogik ableiten, dessen Gültigkeit si der Tableaumethode nachweisen läßt - und damit, wegen der Vollständigkeit der Tableaumethode, jedes gültige Argument ü

Wir haben am obigen Beispiel gesehen, wie die Regeln des Sequenzenkalküls es uns ermöglichen, aus einem abgeschlossen Tableau die Gültigkeit des Ausgangsarguments formal nachzuwe Wir können einen solchen Nachweis in die Form einer richtigen Ableitung des Arguments bringen, die von einer Anzahl von dir gültig erkennbaren Argumenten (den "Axiomen" des Sequenzer ausgeht und durch verkettete Anwendung von Regeln des Sequenzenkalküls zuletzt zum Argument gelangt, dessen Gültigk nachzuweisen war. Dazu wird meist eine baumartige graphisch Darstellung verwendet; als Beispiel geben wir hier die Abeitung Sequenzenkalkül von dem oben diskutierten Argument (89)

(114)

(Axiom) p & (q v r), ⊧ (p & q) v r, p & (q v r), ⊧ (p & q) v r,
(Ax.)
p, q v r, q   p & q, r, q   p, q v r, r   p & q, r, q
(v, L) --
p & (q v r), ⊧ (p & q) v r,
p, q v r   p & q, r, q

p & (q v r), ⊧ (p & q) v r,
p, q v r   p & q, r, p
--- (&, R)
p & (q v r), ⊧ (p & q) v r,
p, q v r   p & q, r
------------------------ (v,R)
p & (q v r), ⊧ (p & q) v r
p, q v r
------------------------ (&,L)
p & (q v r) ⊧ (p & q) v r

1.2 Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik

Der Sequenzenkalkül läßt sich ohne große Probleme auf die Prädikatenlogik erweitern. Die Erweiterung involviert Prinzipien sich ähnlich aus den Tableauregeln für die Quantoren (und für Identität) herleiten lassen, wie die Prinzipien des Aussagenkalkü den Tableau-Regeln für die Junktoren. Wiederum läßt sich der Zusammenhang zwischen Regeln und Prinzipien am leichtesten Beispiel erläutern.

Wie wir gesehen haben, ist das Argument

(115) $(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y))) \models (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R($

gültig. Das entsprechende Tableau wiederholen wir in (116):

(116) WAHR || FALSCH

WAHR	FALSCH
$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,$
$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	
$Q(a)$	
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$	$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$
$P(b)$	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$
	$Q(a) \,\&\, R(b, a)$

| |

Q(a) | R(b, a)

=============   ==============

$P(b) \rightarrow$
$R(b, a))$

| | R(b,a) | P(b) |

================   =============

Zur Rechtfertigung der Behauptung, daß das Argument (115) gü arbeiten wir uns wiederum hoch, ausgehend von den trivial gü

Argumenten, die den geschlossenen Tableau-Ästen von (116)
entsprechen. Dabei schenken wir uns diesmal die Schritte, die
Reduktion von aussagenlogischen Junktoren zu tun haben und
beschränken uns auf diejenigen, die sich auf die Quantoren bez
Der erste Schritt dieser Art, den wir zu berücksichtigen haben (
also der, welcher in der Tableaukonstruktion als letzter durchg
wurde), betrifft die Reduktion der Formel $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$ u
"Wahr". In diesem Schritt wurde der Quantor $(\forall x)$ mit dem Par
instanziiert.
Das Argument, das dem Resultat dieser Anwendung entspricht,
sich in (117), das Argument, das mit dem Tableau-Ast assoziiert
dem dieses Resultat hervorging, in (118).

(117)

$$\begin{array}{ll}
(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))), \;\vdash & (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, \\
Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)), Q(a), & P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y)), \\
(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)), P(b), & (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y)), \\
P(b) \rightarrow R(b, a)) & Q(a) \,\&\, R(b, a), R(b, a)
\end{array}$$

(118)

$$\begin{array}{ll}
(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))), \;\vdash & (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, \\
Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)), Q(a), & P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y)), \\
(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)), P(b) & (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y)), \\
 & Q(a) \,\&\, R(b, a), R(b, a)
\end{array}$$

(N.B. Der einzige Unterschied zwischen (117) und (118) besteht
daß in (117) die zusätzliche Prämisse $P(b) \rightarrow R(b, a))$ vorkommt!

Wir müssen zeigen, daß die Gültigkeit von (118) aus der von (1
Intuitiv solte klar sein, daß dies so sein muß. Denn ist
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$ wahr ist, dann muß auch $P(b) \rightarrow R(b,a))$ wah
Gäbe es also ein Gegenbeispiel für (118), so wäre dieses ebenfall
Gegenbeispiel für (117). Also folgt die Gültigkeit von (118) aus
Gültigkeit von (117). Die entsprechende Regel des Sequenzenka
findet sich in (119)

(119) $$\frac{A_1, \ldots, (\forall v_i)\, A,\, A(t/v_i), \ldots, A_n \ \vdash\ B_1, \ldots, B_m}{A_1, \ldots, (\forall v_i)\, A \ \vdash\ , \ldots, A_n \ \vdash\ B_1, \ldots, B_m}\ (\forall, L)$$

(Hier ist wiederum t ein beliebiger geschlossener Term.)

Der nächste Schritt betrift die Reduktion der sich unter "Falsch" befindlichen Formel $(\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b, y))$. Die Argumente, die mi betreffenden Tableau-Ast vor und nach dem Reduktionsschritt assoziiert sind, sind in (120) (nach der Reduktion) und (121) (v Reduktion) aufgeführt.

(120)

$(\exists y)(Q(y) \ \& \ (\forall x)(P(x) \to R(x, y))), \quad \vdash \quad (\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(x,$
$Q(a) \ \& \ (\forall x)(P(x) \to R(x, a)), Q(a), \quad P(b) \to (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b, y)),$
$(\forall x)(P(x) \to R(x, a)), P(b) \qquad (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b, y)),$
$\qquad Q(a) \ \& \ R(b, a)$

(121)

$(\exists y)(Q(y) \ \& \ (\forall x)(P(x) \to R(x, y))), \quad \vdash \quad (\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(x,$
$Q(a) \ \& \ (\forall x)(P(x) \to R(x, a)), Q(a), \quad P(b) \to (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b, y)),$
$(\forall x)(P(x) \to R(x, a)), P(b) \qquad (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b, y))$

Die Gültigkeit von (121) folgt aus der Gültigkeit von (120) fast g wie die Gültigkeit von (118) aus der von (117) folgte. Gäbe es e Gegenbeispiel für (121), dann würde dieses alle Formeln auf de Seite falsifizieren. Dann wäre also insbesondere $(\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b,$ falsch. Das aber impliziert, daß auch $Q(a) \ \& \ R(b, a)$ falsch wäre, damit hätten wir also auch ein Gegenbeipiel für (120) Das rele Prinzip ist (122)

(122) $\quad \Gamma \vdash \Delta, (\exists v_i)\, A,\, A(t/v_i)$

$$\overline{}^{4} \qquad (\exists, R)$$

$$\Gamma \vdash \Delta, (\exists v_i)\, A$$

(t ein beliebiger geschlossener Term)

Der nächste für uns relevante Schritt, ist der, in dem die all-quantifizierte Formel $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y)))$ unter "] mit dem neuen Parameter b instanziiert wird. Die Argumente, Tableau nach und vor diesem Schritt entsprechen, sind die in ((124)

(123)

$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))),\ \vdash\ (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,$
$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)), Q(a), P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b, y))$
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$

(124)

$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))),\ \vdash\ (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,$
$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)), Q(a),$
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$

In diesem Fall ist die Rechtfertigung etwas komplizierter. Nehm an, (123) sei gültig. Wäre nun (124) nicht gültig, dann gäbe es Gegenbeispiel für dieses Argument, d.h. ein Modell M, in dem di Prämissen von (124) wahr sind und der Schluß - also die Forme $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y)))$ - falsch. Wir können dabei annel daß M ein Modell für die Sprache L ist, die nur aus den nicht-lo Konstanten besteht, die in (124) vorkommen. Aus dem Falsch Se $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x, y)))$ folgt, daß das Universum von M e Individuum d enthalten muß, das die Formel $P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&$] nicht erfüllt. Da b ein neuer Parameter war und somit nicht zu können wir nun M zu einem Modell M' für die Sprache L U {b} expandieren, in dem b das Individuum d bezeichnet. (Ansonster genau wie M!) Es ist leicht einzusehen, daß in M' - genau wie in

[4] Von jetzt an verwenden wir in den schematischen Darstellungen vo Prinzipien des Sequenzenkalküls, den griechischen Großbuchstaben Γ zu Bezeichnung der Formelmenge $\{A_1,\ldots, A_n\}$ und den Buchstaben Δ zur Bezeichnuing von $\{B_1,\ldots, B_m\}$.

Formel $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x, y)))$ falsch und die Prämissen (120) wahr sind. Überdies falsifiziert M' die Formel $P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(b, y))$ wegen der Entscheidung, die wir bez der Interpretation von b getroffen haben. Also wäre M' ein Gegenbeispiel für (123) - entgegen unserer Annahme.

Auch dieser Überlegung entspricht ein Prinzip des Sequenzenka und zwar (125).

(125)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, (\forall v_i)\, A, A(\alpha/v_i)}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall v_i)\, A} \qquad (\forall, R)$$

(Hier muß α ein Parameter sein, der in keiner der Formeln des Arguments unterhalb des waagerechten Striches vorkommt.)

Der letzte hier zu betrachtende Reduktionsschritt ist der, in der Formel $(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)))$ links von $\vdash$ mit dem Par a instanziiert wurde. Die Argumente vor und nach der Regelar sind die in (126) und (127). (Weil der jetzt betrachtete Schritt in der Tableaukonstruktion war, ist das zweite dieser Argument ursprüngliche Argument (57), dessen Gültigkeit nachzuweisen v

(126)

$(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))), \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x,$
$Q(a) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a))$

(127)

$(\exists y)(Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))) \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& R(x,$

Die Argumentation, daß die Gültigkeit von (126) die von (127) r zieht, ist ähnlich wie im soeben diskutierten Fall: Ein Modell M, Prämisse von (127) wahr und seinen Schluß falsch macht, wird Individuum d enthalten, das die Formel $Q(y) \& (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y$ erfüllt. Wiederum können wir dann M zu M' expandieren, inder als Namen von d interpretieren. M' wird dann auch $Q(a) \& (\forall x)($ $R(x, a))$ verifizieren. Die entsprechende Sequenzenkalkülregel is

(128)

$$\frac{\Gamma,\ (\exists v_i)\, A,\ A(\alpha/v_i) \vdash \Delta}{\Gamma,\ (\forall v_i)\, A \vdash \Delta}\ (\exists, L)$$

(Hier muß α ein Parameter sein, der in keiner der Formeln des Arguments unter dem Strich vorkommt.)

Genauso wie für das aussagenlogischen Beispiel (89) können wir erbrachten Beweis der Gültigkeit von (115) in der Form einer A im Sequenzenkalkül darstellen (vgl. (113):

(129)

$P(b) \vdash P(b)$ $\qquad\qquad$ $R(b,a) \vdash R(b,a)$

$(\exists y)(Q(y)\ \&\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))),\ Q(a)\ \&\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)),\ Q(a),\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)),\ P(b),\ P(b) \rightarrow R(b, a)) \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(x, y))),\ P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(b, y)),\ (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(b, y)),\ Q(a)\ \&\ R(b,a),\ R(b,a),\ P(b)$

$(\exists y)(Q(y)\ \&\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y))),\ Q(a)\ \&\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)),\ Q(a),\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)),\ P(b),\ P(b) \rightarrow R(b, a)),\ R(b,a) \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q($ … $R(x, y))),\ P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(b, y)),\ (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(b, y)),\ Q(a)\ \&\ R(b, a),\ R(b,a)$

$(\exists y)(Q(y)\ \&\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y))),\ Q(a)\ \&\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)),\ Q(a),\ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, a)),\ P(b),\ P(b) \rightarrow R(b,a)) \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(x, y))),\ P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(b, y)),\ (\exists y)(Q(y)\ \&\ R(b, y)),\ Q(a)\ \&\ R(b,a),\ R(b,a)$

Q(a) ⊢ Q(a) (∃y)(Q(y) & ⊢ (∀x)(P(x) →
———————————————————— (∀x)(P(x) → R(x,y))), (∃y
(∃y)(Q(y) & ⊢ (∀x)(P(x) → Q(a) & R(x, y))),
(∀x)(P(x) → R(x, y))), (∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, a)), P(b) →
Q(a) & R(x, y))), Q(a), (∃y)(Q(y) &
(∀x)(P(x) → R(x, a)), P(b) → (∀x)(P(x) → R(x, a)), R(b, y)),
Q(a), (∃y)(Q(y) & P(b), (∃y)(Q(y) &
(∀x)(P(x) → R(x, a)), R(b, y)), R(b, y)),
P(b), (∃y)(Q(y) & Q(a) & R(b,a),
R(b, y)), R(b,a)
Q(a) & R(b,a),
Q(a)

————————————————————————————————————

(∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, y))), ⊢ (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y)))
Q(a) & (∀x)(P(x) → R(x, a)), P(b) → (∃y)(Q(y) & R(b, y)
Q(a), (∀x)(P(x) → R(x, a)), (∃y)(Q(y) & R(b, y)),
P(b) Q(a) & R(b,a),

————————————————————————————————————

(∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, y))), ⊢ (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y)))
Q(a) & (∀x)(P(x) → R(x, a)), P(b) → (∃y)(Q(y) & R(b, y)
Q(a), (∀x)(P(x) → R(x, a)), (∃y)(Q(y) & R(b, y))
P(b)

————————————————————————————————————

(∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, y))), ⊢ (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y)))
Q(a) & (∀x)(P(x) → R(x, a)), P(b) → (∃y)(Q(y) & R(b, y)
Q(a), (∀x)(P(x) → R(x, a))

————————————————————————————————————

(∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, y))), ⊢ (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y)))
Q(a) & (∀x)(P(x) → R(x, a)) P(b) → (∃y)(Q(y) & R(b, y)

————————————————————————————————————

(∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, y))), ⊢ (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y)))
Q(a) & (∀x)(P(x) → R(x, a))

————————————————————————————————————

(∃y)(Q(y) & (∀x)(P(x) → R(x, y))) ⊢ (∀x)(P(x) → (∃y)(Q(y) & R(x, y)))

Nach der recht detaillierten Diskussion der obigen Beispiele kön
uns den Kommentar zu den Sequenzenkalkülregeln für die Ide
sparen. Die Regeln sind in (130) and (131) dargestellt. Anschli
werden die regeln in einigen einfachen Beispielen angewandt. W
den schon diskutierten Beispielen konstruieren wir zuerst das
Semantische Tableau für dieses Argument und dann anhand di
Tableaus den Beweis im Sequenzenkalkül.

(130)

$$\frac{\Gamma,\ A,\ t = t',\ A(t//t') \ \vdash\ \Delta}{\Gamma,\ A,\ t = t' \vdash \Delta}\ (=, \text{Sub, L}) \qquad \frac{\Gamma,\ t = t' \vdash \Delta,\ A\ ,\ A(t//t')}{\Gamma,\ t = t' \vdash \Delta,\ A}\ (=, \text{S}$$

(Hier bezeichnet A(t//t') das Resultat der Ersetzung mindestens
Vorkommens von t in A durch t'.)

(131) $$\frac{\Gamma,\ t = t\ \vdash\ \Delta}{\Gamma\ \vdash\ \Delta}\ (=, \text{Ref})$$

Betrachten wir nun folgendes Argument:

(132) $P(a), Q(b), a = b \vdash (\exists x)(P(x) \,\&\, Q(x))$

(133) gibt das entsprechende Tableau.

(133)

WAHR	FALSCH
$P(a)$	$(\exists x)(P(x) \,\&\, Q(x))$
$Q(b)$	
$a = b$	
$Q(a)$	
	$P(a) \,\&\, Q(a)$

	$P(a)$	$Q(a)$
======	======	======

Dieses Tableau läßt sich wie folgt in eine Ableitung des
Sequenzenkalküls transformieren:

(134)

$P(a) \vdash P(a)$ $\qquad\qquad$ $Q(a) \vdash Q(a)$

——————————————————————— ——————————————————

$P(a), Q(b), a = b, Q(a) \vdash (\exists x)(P(x) \,\&\, Q(x)), P(a) \,\&\, Q(a), P(a)$ $\qquad$ $P(a), Q(b), a = b, Q(a) \vdash (\exists x)(P(x) \,\&\, Q($ … $P(a) \,\&\, Q(a), Q(a)$

——

$P(a), Q(b), a = b, Q(a) \vdash (\exists x)(P(x) \,\&\, Q(x)), P(a) \,\&\, Q(a)$

——————————————————————

$P(a), Q(b), a = b \vdash (\exists x)(P(x) \,\&\, Q(x)), P(a) \,\&\, Q(a)$

——————————————————————

$P(a), Q(b), a = b \vdash (\exists x)(P(x) \,\&\, Q(x)),$

Zum Schluß ein Beispiel, in dem auch Funktoren eine Rolle spiele

(135) $(\forall x)(\forall y)(f(x) \neq g(y)),$ $\qquad \vdash \neg (\exists x)(R(x,x)$
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \rightarrow$
$((\exists u)(x = f(u)) \,\&\, (\exists v)(y = g(v))$

Die erste der beiden Prämissen von (136) besagt, daß nichts, wa Wert ist, auch gleichzeitig ein g-Wert sein kann. Inhalt der zwe Prämisse ist, daß das erste Argument von R immer ein f-Wert u zweite Argument immer ein g-Wert sein muß. Also folgt, daß ei nie in der Beziehung R zu sich selbst stehen kann. Dieser Überl zufolge ist das Argument gültig. Das folgende Tableau (137) be dies:

(136) WAHR FALSCH

$(\forall x)(\forall y)(f(x) \neq g(y)),$ $\neg(\exists x)(R(x,x)$

$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \rightarrow$

$((\exists u)(x = f(u)) \ \& \ (\exists v)(y = g(v))$

$(\exists x)(R(x,x)$

$R(a,a)$

$R(a,a) \rightarrow ((\exists u)(a = f(u)) \ \&$

$(\exists v)(a = g(v))$

__________|_____________________|_____________|_______________

| $(\exists u)(a = f(u)) \ \&$ | $R(a,a)$ |

========= $(\exists v)(b = g(v))$ ============

| $(\exists u)(a = f(u))$

$(\exists v)(a = g(v))$

$a = f(c)$

$a = g(d)$

$f(c) = g(d)$

$f(c) \neq g(d)$

| $f(c) = g(d)$

========================|===========================

2. Natürliche Deduktion.

Der Sequenzenkalkül erlaubt uns, ein Argument zu "beweisen", wir von direkt als gültig erkennbaren Argumenten (Argumente der Form "A_1 & ... & C & .... & A_n ⊦ B_1 v ... v C v .... v B_m") ausgehe und daraus die Gültigkeit anderer Argumente ableiten. Die Zwischenergebnisse einer solchen Ableitung sind also alle Behau von der Form: "Das Argument ... ist gültig" . Das Ziel, das wir un Anfang des letzeten Abschnitts gestellt hatten - ein Beweisverfa entwickeln, in dem der Schluß B eines gültigen Arguments A_1 & . ⊦ B aus den Prämissen A_1, ..., A_n abgeleitet werden kann, indem eine Reihe D_1, ..., D_k von Formeln konstruiert, die mit A_1, ..., A_n anfängt, mit B endet, und in der jede von den A_1, ..., A_n versch Formel D_i aus den ihr vorangehenden abgeleitet wurde - ist also nicht erreicht.

In diesem Abschnitt wollen wir dieses Ziel weiter verfolgen. Daz transformieren wir zunächst die Beweise des im letzten Abschn beschriebenen Sequenzenkalküls in "lineare" Ableitungen, in de jeder Schritt zu einer neuen Formel (statt zu einem neuen gülti Argument) führt. Eine problemlose Linearisierung ist allerdings nicht möglich; auch das neue Verfahren kommt nicht umhin, al Zwischenstufen eines Beweises die Gültigkeit zusätzlicher Argum zeigen, die nicht nur von den Ausgangsprämisasen, sondern (au anderen Prämissen Gebrauch machen. (Diese zusätzliche Argun verhalten sich zum Ausgangsargument ungefähr so wie in einer mathematischen ein Lemma zu dem mit seiner Hilfe bewiesener Theorem.)

Damit eine lineare Ableitung des Beweisverfahrens, das wir in d Abschnitt entwickeln werden, eindeutig und mühelos als Beweis vorgegebenen Schluses aus den vorgegebenen Prämissen erkan werden kann, muss für jede Zeile der Ableitung überprüft werd können, aus welchen Annahmen sie abgeleitet wurde. Dazu bra wir ein Buchführungssystem. Das hier gewählte wurde unseres zum ersten Mal von J. Lemmon verwendet (Lemmon (196?). Es darin, dass die Zeilen der Ableitung von oben nach unten durchnumeriert werden uns dass zwischen der Zeilennummer u Formel die Nummern derjenigen Annahmen aufgelistet werden, denen die Formel aufgrund ihrer Ableitung abhängig ist.

Wiederum verfahren wir exemplarisch, und zwar indem wir no
einmal das Argument (89) betrachten, das wir auch schon zur
Illustration des Sequenzenkalküls verwendet haben:

(89) p & (q v r) ⊦ (p & q) v r

Diesmal gehen wir von dem Beweis dieses Arguments im
Sequenzenkalkül aus, wie wir ihn in im letzten Abschnitt darge
haben. Das Diagramm (114) dieser Ableitung sei hier noch einn
wiederholt:

(114)

```
(Ax.)      p & (q v r),  ⊧ p & q) v r,p & (q v r),  ⊧ (p & q) v r,   (Ax.
           p, q v r, q   p & q, r, q   p, q v r, r        p & q, r, q
(v,  L)               ----------------------------------------------
                               p & (q v r),   ⊧ (p & q) v r,
     p & (q v r), ⊧ p & q) v r,  p, q v r      p & q, r, q
     p, q v r     p & q, r, p
     ----------------------------------------------------        (&,   R)
                    p & (q v r), ⊧ (p & q) v r,
                    p, q v r     p & q, r
                    ---------------------         (v,R)
                    p & (q v r), ⊧ (p & q) v r
                    p, q v r
                    ---------------------         (&,L)
                    p & (q v r) ⊧ (p & q) v r
```

Unser Ziel besteht jetzt darin, diese Ableitung in eine lineare Al
von dem Schluss aus der (in diesem Fall einzigen) Prämisse abz
und dabei die Ableitungsregeln zu identifizieren, die die einzel
Schritte dieser neuen Ableitung rechtfertigen. Das Beweisssyste
auf diese Weise entstehen wird, ist ein sogenanntes System der
Natürlichen Deduktion.

Warnung: Das Regelsystem, das sich aus unserem ersten
Transformationversuch von (114) ergibt, ist sowohl in seiner
Formulierung als auch in seiner Anwendung unnötig umständli
wir werden es später nachbessern. Es sei jetzt schon im voraus
hingewiesen, dass es keine eindeutige Lösung zu der Frage gibt:

leite ich aus dem Sequenzenkalkül ein entsprechendes System d Natürlichen Deduktion ab. Eine (fast) eindeutige Lösung ergibt dann, wenn wir zusätzliche Symmetrieüberlegungen in dem En miteinbeziehen

Als ersten Schritt der Ableitung im neuen Stil führen wir die Pr des Arguments in separaten, aufeinanderfolgenden Zeilen auf. gesagt werden die Zeilen numeriert und mit "Pr" als Prämissen annotiert. Im vorliegenden Fall haben wir nur eine Prämisse. bekommt also die Nummer 1, die wir ganz links hinschreiben, wir den Vermerk "Pr" ganz rechts eintragen. Überdies wird, wie angedeutet, zwischen der Zeilennummer und der Formel verme welchen früheren Zeilen im Beweis die gegebene Zeile abgeleitet und von denen sie also as abhängig zu betrachten ist. Da die P eines Arguments nicht aus anderen abgeleitet werden, gelten si von sich selbst abhängig. Deshalb tragen wir bei einer Prämisse an dieser Stelle die Nummer der Zeile selbst ein.

Damit sieht der Anang der Ableitung von (89) wie in (138) aus:

(138) 1 1 p & (q v r) Pr

Die Ableitung (114) fängt mit direkt verifizierbaren Argumente außer der Prämisse von (89) noch weitere Prämissen haben. Di weiteren Prämissen betrachten wir jetzt als zusätzliche Annahm wir als Hilfshypothesen eintragen, um daraus dann die Schlüsse dirkt verifizierbaren Argumente zu ziehen. In späteren Ableitungsschritten werden diese Hilfshypothesen dann wieder werden. Die zusätzlichen Annahmen werden als solche vermerk mittels der Abkürzung "An". Sonst werden sie wie Prämissen g Sie werden als nur von sich selbst abhängend vermerkt.

Die direkt verifizierbare "Ableitungen" in (114) waren (92), (95 (96). Betrachten wir zuerst (95):

(95) p & (q v r), p, q v r ⊢ (p & q) v r, p & q, r, q

Diese Ableitung erfordert als zusätzliche Annahmen die drei For q v r und q. Fügen wir diese Formeln als Annahmen in (138) e bekommen wir (139):

(139) 1 1 p & (q v r) Pr

2	2	p	An
3	3	q v r	An
4	4	q	An

Aus dieser erweiterten "Prämissenmenge" folgt nun die Disjunkt Formeln hinter dem Schlußzeichen ⊧ von (95). Das dabei verwe Inferenzprinzip beinhaltet, daß aus einer Konjunktion, die eine als Konjunkt enthält, beliebige Disjunktionen abgeleitet werden die C als Disjunkt enthalten. In dem jetzt verwendeten Ableitungsformat wird aus diesem Prinzip die Regel, daß man au beliebige C enthaltende Disjunktionen ableiten darf. Wir bezeicl diese Regel als " v-I' ". (" v-I' " ist zu lesen als: "v-Introduktion" schreiben "I' " statt "I", um so die eben formulierte Version der von einer anderen zu unterscheiden, die wir später als endgült Version in unser Regelsystem aufnehmen werden, auf das wir zusteuern). Im gegebenen Fall involviert die Anwendung der Re Annahme q als (Anwendungs)-Prämisse und die Disjunktion (p & q) v r v (p & q) v r v q als Anwendungsschluß. Wir kodier Anwendung, indem wir den Schluß als nächste Zeile eintragen, s Anwendung der Regel v-I' auf die Anwendungsprämisse q mit N 4 vermerken, und sie überdies als von den Formeln abhängig k von denen die Anwendungsprämisse abhängt. Da letztere wie a ersichtlich ausschließlich von sich selbst abhängt, hängt auch d Anwendungsschluß nur von dieser Formel ab.

Die um diesen Schritt erweiterte Ableitung hat die Form (140):

(140)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'

Wir geben auch gleich eine schematische Formulierung der Rege der ersten einer Reihe von Ableitungsregeln, die wir im Laufe d schrittweisen Transformation von (114) formulieren werden.

(v-I')	n	$i_1,\ldots,i_k$	C	...
	m	$i_1,\ldots,i_k$	B_1 v ... v C v .... v B_m	n, v-I'

Die Interpetation dieses Schemas sollte klar sein: Es besagt, daß einer Zeile mit Nummer n und Formel C beliebige Disjunktionen abgeleitet werden können, die C als Disjunkt enthalten. Die so abgeleitete Disjunktion wird als eine neue Zeile eingetragen. Es betont, daß diese Zeile nicht unmittelbar auf der Zeile mit C zu f braucht; die Inferenz kann an beliebigen späteren Punkten in Ableitung erfolgen. Deshalb ist die Nummer m der neuen Zeile i Allgmeinen nicht gleich n + 1. Die Zeile wird rechts mit einer A versehen, die den Namen " v-I' " der angewandten Regel erwäh sowie auch die Zahl der Zeile, die bei der Regelanwendung als P verwendet wurde. Weil diese letztere Zeile die Begründung des gezogenen Schlußes ist, hängt die neue Zeile von denselben Zeile Also werden die Nummern der Zeilen, von denen C abhängt, in neuen Zeile übernommen.[5]

Jetzt wenden wir uns dem dritten direkt verifizierbaren Argum (114), also dem Argument (96) zu:

(96) p & (q v r), p, q v r ⊨, (p & q) v r, p & q, r, q

Auch dieses Argument involviert nebst der Prämisse von (89) zusätzliche Annahmen - p, q v r und r. Zwei von diesen sind ab als Annahmen eingetragen worden, und es wäre müßig, dies zu wiederholen. Die Annahme r gibt es aber noch nicht, und diese wir nun als weitere Annahme hinzunehmen:

(141)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
	6	6	r	An

Die Anwendung der Regel v-I' auf die Annahme in Zeile 6 erlaub nächste Zeile den Schluß von (96) einzutragen:

---

[5] Diese formuloierung der Regel ist insofern etwas problematisch, als einem Disjunktionsbegriff Gebrauch macht, der genau gesprochen gar n unserer Formulierung der Prädikatenlogik gehört. Nach unserer offizie definition von Aussagen- und Prädikaten-Logik gibt es nur zweigliedirge Disjunktionen von der Form (A v B), und mehrgliedrige wie A_1 v ... v A_n s vereinfachte Schreibweisen von Formeln zu verstehen, die sich durch Bildung zweigliedriger Disjunktionen bilden, wobei, wie wir gesehen habe genaue reihenfolge der Bildung (also der " offiziellen Klammerung") der mehrgliedrigen Diskjunktion) aus der Sicht der Bedeutung der Formel le belanglos ist. In der später erfolgenden Formulierung der Regel v-I wer uns nicht länger auf Disjnuktioner mit beliebig vielen Gliedern, sondern die kanonischen zweigliedrigen Disjunktionen beziehen.

(142)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
	6	6	r	An
	7	6	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	6, v-I'

Man könnte meinen, dieser Schritt sei überflüssig, da wir diesen der ja mit dem Schluß von (95) identisch ist, schon abgeleitet h kommt in der Ableitung schon als Zeile 5 vor. Dieser Einwand r aber den entscheidenden Unterschied zwischen der Zeile 5 und 7: In 5 hängt die Formel von Zeile 4 ab, während die Formel der dagegen als von Zeile 6 abhängig vermerkt ist. Die Formeln hab obzwar sie als Formeln identisch sind, im Zusammenhang der A einen unterschiedlichen Status.

Die Bedeutung dieses Unterschiedes zwischen den Zeilen 5 und 7 deutlich, wenn wir den nächsten Schritt der Ableitung (114) b In diesem Schritt wird aus der Gültigkeit der beiden Argumente und (96) auf die Gültigkeit des Arguments (97) geschlossen:

(97) p & (q v r), p, q v r ⊨ p & q) v r, p & q, r, q

Das Prinzip, das diesen Schritt begründet, haben wir schon in Einzelheiten diskutiert. Aus der jetzigen Perspektive läßt es sich formulieren: Um zu zeigen, daß ein Schluß B aus einer Disjunktion zusammen mit weiteren Prämissen A_1, ..., A_n ableitbar ist, reicht zeigen, daß B einerseits aus A_1, ..., A_n und C und andererseits au A_n und D abgeleitet werden kann. In dem linearen Ableitungs das wir hier verwenden, kann dieses Prinzip wie folgt präzisiert Wenn die Ableitung einen Beweis von B aus A_1, ..., A_n und C und ebenfals einen Beweis von B aus A_1, ..., A_n und D enthält, so dür diese Ableitung als einen Beweis von B aus A_1, ..., A_n und C v D i enthaltend betrachten und folglich als nächste Zeile die Formel I einmal hinschreiben, aber jetzt nicht als von C bzw. D, sondern v abhängig.

Für den vorliegenden Fall ist diese Formulierung ausreichend: haben in Zeile 5 eine Ableitung von der Formel (p & q) v r v (p & q) v r v q aus der Annahme q (denn nur dav die Formel in Zeile 5 ab!) und in Zeile 7 eine Ableitung dieser Fo der Annahme r. Die Ableitung (142) enthält also einen Beweis Formel - nennen wir sie B - aus q und ebenfalls einen Beweis vo

r. Folglich können wir B als aus q v r bewiesen betrachten und also die Formel zum dritten Mal als Zeile hinschreiben, jetzt aber der Disjunktion q v r in Zeile 3 folgend. In dieser neuen zeile hä von der Formel bzw. den Formeln ab, von der oder denen die Disjunktion q v r abhängt. Da die Disjunktion in Zeile 3 nur von selbst abhängt, soll die Formel B in der neuen Zeile also auch als dieser Formel abhängig vermerkt werden. Mit anderen Worten, Anwendung der gerade erwähnten Regel - die wir mit "v-E" (für Eliminierung") bezeichnen - auf die Ableitung in (142) führt zu folgenden Erweiterung:

(143)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
	6	6	r	An
	7	6	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	6, v-I'
	8	3	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	3,4,5,6,7, v-E

Die letzte Zeile von (143) bedarf allerdings noch eines weiteren Kommentars. Erstens gibt es hier auf der rechten Seite eine zie komplexe Annotation mit Erwähnung von nicht weniger als fünf Die Bedeutung dieser Annotation ist die folgende. Wie schon be ist Sinn der Regel, daß eine gewisse Formel B als aus einer Disjun v D abgeleitet betrachtet werden darf, weil man sie einmal aus C einmal aus D abgeleitet hat. Mit anderen Worten, die Rechtferti Regelanwendung besteht aus:

(i) der Präsenz einer Zeile, in der die Disjunktion C v D steht - die Nummer dieser Zeile ist die erste der fünf Zahlen, die Te der Annotation rechts ausmachen;

(ii) der Präsenz einer Ableitung von B aus C; diese Ableitung wi markiert durch die Zahl der Zeile, die C enthält, und die Zah Zeile, in der der Schluß B vorkommt, der von C abhängt; in d Annotation sind es die zweite und die drittte Zahl (hier 4 fü Zeile von q und 5 für die Zeile der daraus abgeleiteten Form (p & q) v r v (p & q) v q);

(iii) der Präsenz einer Ableitung von B aus D; diese wird analog Ableitung von B aus C durch zwei Zahlen, die vierte und fün identifiziert.

Im Allgemeinen sind die Anwendungen dieser Regel sogar noch komplizierter, und zwar dann, wenn die Ableitung von B aus C zusätzliche Prämissen verwendet - die in einem Schritt erfolgen Ableitung der Formel in Zeile 5 aus der Formel in Zeile 4, welche der letzteren Formel beruht, ist in dieser Hinsicht eher eine Au Werden zusätzliche Prämissen in der Ableitung von B aus C geb so wird das dadurch erkennbar sein, daß die Zeile, die den Schlu enthält, zusätzliche Zeilen erwähnent, von denen dieser Schluß und dasselbe wird im Allgemeinen auch für die zweite Ableitung B aus D - der Fall sein. In diesem Fall kann man aufgrund der z Ableitungen nur schließen, daß B aus C v D zusammen mit all de zusätzlichen Prämissen folgt, von denen B in der ersten bzw in zweiten dieser beiden Ableitungen (oder auch in beiden) abhän der Formulierung (144) der Regel v-E ist auch dieser zusätzliche Komplikation schon Rechnung getragen.

(144) v-E(liminierung)

n	$h_1,...,h_g$	C V D	An
.			
.			
p	p	C	An
.			
.			
q	p, $i_1,...,i_k$	B	...
.			
.			
r	r	D	An
.			
.			
s	r, $j_1,...,j_f$	B	...
m	$h_1,...,h_g$, $i_1,...,i_k$, $j_1,...,j_f$	B	n, v-I'

Disjunktion. Die Zeilen p und q markieren die Ableitung von B a als zusätzliche Prämissen die Zeilen $i_1,...,i_k$ involviert), und die Z und s die Ableitung von B aus D (und zusätzlichen Zeilen $j_1,...,j_f$). Schlußzeile m zeigt B als abhängig von:

(i) den Zeilen $h_1,...,h_g$, von denen die Disjunktion C v D abh

(ii) den Zeilen $i_1,...,i_k$, die als zusätzliche Prämissen in der Ableitung von B aus C verwendet wurden; und
(iii) den Zeilen $j_1,...,j_f$, die als zusätzliche Prämissen in der Ableitung von B aus D gebraucht wurden.

Der Fortschritt, den wir erzielen, indem wir die neue Zeile m hi: besteht also darin, daß die Formel B nicht länger wie in Zeile q v Zeile p, noch auch wie in Zeile s von der Zeile r, sondern statt de der Zeile n der Disjunktion abhängt.[6]

Es sei auch noch auf einen weiteren Aspekt der Regel v-E hingev Sie ist nicht nur komplizierter als die oben formulierte Regel v-I unterscheidet sich von dieser auch unter dem folgenden grunc Gesichtspunkt. Die Regel v-I' besagt, daß man eine Formel aus e anderen Formel ableiten darf. Die Anwendungen dieser Regel b sich alaso aussschließlich auf das Vorkommen einer vorangehen in der Ableitung, die die Prämissenformel enthält, und sind vor sonstigen Struktur der Ableitung nicht berührt. Die Regel v-E se dagegen für ihre Anwendung das Vorhandensein von Teilablei voraus, und zwar von Ableitungen der jetzt nochmals als Schluß einzutragenden Formel B aus anderen Annahmen. Wir untersc zwischen diesen beiden Regeltypen, indem wir die ersteren, die Formeln als Regelprämissen verwenden, Inferenzregeln und die letzteren, die die Existenz von Teilableitungen als Prämissen ve Deduktionsregeln nennen.

Obwohl bei der Wahl der Regeln eines Deduktionssystems im Fo Natürlichen Deduktion beträchtlicher Spielraum besteht, ist es nicht möglich, in solchen Systemen auf Deduktionsregeln ganz z verzichten. Damit zeigt sich, daß die "Linearisierung" des Beweisverfahrens, die die Architektur der Natürlichen Deduktio erlaubt, bis zu einem gewissen Grade eine kosmetische Angeleg bleibt: Wir schreiben die Formeln jetzt zwar in Zeilen untereina aber das bedeutet noch keineswegs, daß die eigentliche Struktu Ableitung auch wirklich mit einer rein linearen Abfolge gleichg werden darf: Im Allgemeinen werden die Ableitungen Teilable enthalten, die sich von der Gesamtableitung dadurch untersche

---

6 Wie schon angekündigt, werden wir später zu den Feinheiten dieser Regelbeschreibung zurückkehren. Zur Ermutigung des Lesers sei bemerk (zumindest nach unserer persönlichen Einschätzung) die Regel v-E sowo konzeptuell als auch, was ihre Buchführung betrifft, die wohl anspruchs aller Prinzipien der Natürlichen Deduktion ist.

sie statt oder neben den Ausgangsprämissen von zusätzlichen Annahmen Gebrauch machen.[7]

Nach dieser längeren Unterbrechung nehmen wir unser Beispiel auf. Der nächste Schritt in (114) betrifft wieder ein "Axiom" de: Sequenzenkalküls, und zwar das erste der drei unmittelbar als erkennbaren Argumente, (92)

(92)p & (q v r), p, q v r ⊨ (p & q) v r, p & q, r, p

In diesem Fall ist es die Formel p, die links und rechts von ⊨ vo: und somit die Gültigkeit des Arguments belegt. Dieser Begründı entspricht in der jetzt fälligen Ableitungserweiterung wiederum Anwendung von v-I':

(145)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
	6	6	r	An
	7	6	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	6, v-I'
	8	3	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	3,4,5,6,7, v-E
	9	2	((p & q) v r) v (p & q) v r v p	2, v-I'

Auf den ersten Blick sieht der jetzt anstehende Ableitungsschrit vorletzten ähnlich. Die Ähnlichkeit ist in der Tableaukonstrukti in der sequenztheoretischen Ableitung (114) besonders augenf: denn sowohl die zwei betroffenen Reduktionsregeln der Tableaumethode (für Disjunktionen unter "Wahr" und Konjunk unter "Falsch") als auch die beiden diesen Regeln entsprechend Prinzipien des Sequenzenkalküls stehen in einer unverkennbar Symmetriebeziehung. Im Rahmen der jetzt verwendeten Beweisarchitektur gibt es aber dennoch einen wichtigen Unters

---

[7] Manchmal bilden solche Teilableitungen innerhalb der Gesamttable einen leicht identifizierbaren "Block", aber auch dies ist keineswegs imme öfter sind verschiedene Teilableitungen in der Anordnung der Zeilen m vermischt und nur mit Hilfe der Annotationen zu "entflechten". Gerade w Linearität solcher Ableitungen eigentlich illusorisch ist, sind die Annota für die Interpretation der Ableitung wesentlich.

der es erlaubt, für den jetzt durchzuführenden Ableitungsschri viel einfachere Regel als (v-I') zu formulieren.

Wir erinnern noch einmal an die Rechtfertigung des betroffene Schlußes in (114): Wenn aus gegebenen Prämissen A_1, ..., A_n ei Disjunktion B_1 v ...v (C &D) v C v ... v B_m und andermal die Disju B_1 v ...v (C &D) v D v ... v B_m folgt, dann folgt aus diesen Prämiss der gemeinsame Teil B_1 v ...v (C &D) v ... v B_m dieser zwei Disju nen. Aus der jetzigen Perspektive läßt sich dies folgendermaße umformulieren: Gibt es Ableitungen aus von sowohl B_1 v ...v (C &D) v C v ... v B_m als auch B_1 v ...v (C &D) v D v ... v B_m kann man auch B_1 v ...v (C &D) v ... v B_m als aus A_1, ..., A_n abge betrachten. Wir könnten die hier zu verwendende Ableitungsr in der Tat so formulieren. Damit würden wir aber eine Komplix das Regelsysten einführen, deren Überflüssigkeit sich direkt er läßt. (Insbesondere ist gerade erwähnte die Regel eine Deduktic und nicht wie die, wie wir statt ihrer einführen werden, eine Inferenzregel.)
Der Untershied zwischen dem vorliegenden Fall und der oben durchgeführten Anwendung von v-I' ist, daß die Schlüsse der z Ableitungen, von denen die neue Deduktionregel ausgeht, von s den neuen Schluß schon logisch impizieren: Die Disjunktionen E (C &D) v C v ... v B_m und B_1 v ...v (C &D) v D v ... v B_m implizieren zusammen die Disjunktion B_1 v ...v (C &D) v ... v B_m. Oder ande gesagt, das Argument

(146) B_1 v ...v (C &D) v C v ... v B_m , $\models$ B_1 v ...v (C &D) v ... v B_m
B_1 v ...v (C &D) v D v ... v B_m

ist gültig. Wir können daher dieses Argument selbst zur Ableitungsregel deklarieren und so die Fortsetzung von (140) n Zeile, in der die Formel B_1 v ...v (C &D) v ... v B_m vorkommt, dami rechtfertigen, daß es schon Zeilen mit den Formeln B_1 v ...v (C &D ... v B_m und B_1 v ...v (C &D) v D v ... v B_m gibt.

Es sollte aus den vorangehenden Überlegungen klar sein, daß di Disjunktion als von all den Annahmen abhängig zu betrachten i denen mindestens eine der zwei längeren Disjunktionen abhäng (140) als Prämissen erwähnt sind.

Wir nennen diese Regel " &-I' ". Weil wir sie demnächst durch e etwas andere Regel ersetzen werden, ersparen wir uns den Auf einer expliziten Definition.

Dennoch sollte leicht nachzuvollziehen sein, daß die Anwendung Regel im gegebenen Fall in (140) zu der neuen Zeile 10 von (147

(147)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
	6	6	r	An
	7	6	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	6, v-I'
	8	3	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	3,4,5,6,7, v-E
	9	2	((p & q) v r) v (p & q) v r v p	2, v-I'
	10	2,3	((p & q) v r) v (p & q) v r	8,9, &-I'

Wir kommen jetzt zu dem Schritt in (114), in dem von der Gült von

(148) p & (q v r), p, q v r $\models$ (p & q) v r, p & q, r

auf die Gültigkeit von

(149) p & (q v r), p, q v r $\models$ (p & q) v r,

geschlossen wird. In der hier konstruierten direkten Ableitung Schritt überflüssig, weil die letzte Formel von (147) schon die e Form einer Disjunktion besitzt. Genauer betrachtet ist die Bezie diese: Der schon erreichte Schluß der Zeile 10 unterscheidet sic der Formel, die wir als nächste hinschreiben möchten, lediglich eine Verdoppelung einiger Disjunkte; schematisch ausgedrückt letztere Disjunktion von der Form A v B und die erstere von der (A v B) v A v B. Daß A v B aber logisch aus (A v B) v A v B folgt - daß das Argument

(150) (A v B) v A v B $\models$ A v B

gültig ist - ist offensichtlich, und wir können auch die Gültigkeit Arguments als Inferenzregel formulieren. Auch auf diese Regel, "DD" (für "Disjunction doubling") nennen, werden wir später ve und deshalb ersparen wir uns auch diesmal die Mühe einer ex Definition. Wie die Regel angewandt wird, sollte aber dennoch k

Insbesondere führt ihre Anwendung auf die letzte Zeile von (14
folgenden Erweiterung:

(151)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
	6	6	r	An
	7	6	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	6, v-I'
	8	3	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	3,4,5,6,7, v-E
	9	2	((p & q) v r) v (p & q) v r v p	2, v-I'
	10	2,3	((p & q) v r) v (p & q) v r	8,9, &-I'
	11	2,3	(p & q) v r	10, DD

In (151) haben wir zwar den Schluß unseres Ausgangsargument
erreicht, aber damit ist unsere Aufgabe noch nicht zu Ende. Den
Formel der Zeile 11 hat zwar die Form des Schlußes von (89), hä
noch von den Annahmen 2 und 3, und nicht (ausschließlich) vo
Prämisse des ursprünglichen Arguments (d.h. von Zeile 1) ab. U
ist eine Zeile, die als Formel den Schluß enthält und nur von de
Prämisse 1 abhängig ist. Um dieses Ziel zu ereichen ist noch ein
zusätzlicher Schritt notwendig, der dem letzten Schritt in dem
(114) entspricht.

Der letzte Schritt von (114) reduziert die Gültigkeit von dem Ausgangsargument (57) auf die des Arguments

(152) p & (q v r), p, q v r $\models$ (p & q) v r

An diesem Punkt bleibt uns nichts anderes übrig, als daß Prinip
dort angewendet wurde, in eine Deduktionsregel zu übersetzen,
ermöglicht, die gewünschte Zeile auf das Vorhandensein einer s
vorhandenen Ableitung zurückzuführen. Das Prinzip, das wir
besagt, daß wenn ein Schluß B aus Prämissen A_1, ..., A_n, C & D, C,
abgeleitet werden kann, es auch als aus A_1, ..., A_n, C & D abgelei
Der Effekt einer Anwendung dieser Regel auf eine Ableitung, in
und D beide als Annahmen vorkommen, ist der, daß der Schluß
länger von diesen beiden Annahmen, dafür aber von all den Ze
abhängig ist, von denen die Konjunktion C & D abhängt.

Auch diese Regel werden wir demnächst durch eine andere ers
Wir nennen sie &-E', verzichten aber wieder auf eine explizite

Formulierung. Wenn man die Regel auf (152) anwendet, führt s
einer neuen Zeile, in der die Formel (p & q) v r nicht länger von
Zeilen 2 und 3 abhängt, aber dafür jetzt von den Zeilen, von de
Konjunktion in Zeile 1 abhängig ist. Da letztere nur von sich sel
abhängt, bekommen wir als neue Zeile:

(153)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	2	p	An
	3	3	q v r	An
	4	4	q	An
	5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
	6	6	r	An
	7	6	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	6, v-I'
	8	3	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	3,4,5,6,7, v-E
	9	2	((p & q) v r) v (p & q) v r v p	2, v-I'
	10	2,3	((p & q) v r) v (p & q) v r	8,9, &-I'
	11	2,3	(p & q) v r	10, DD
	12	1	(p & q) v r	1,2,3,11, &-E'

und damit ist unsere Ableitung komplett.

Bei der Umsetzung von (114) in die Ableitung (153) haben wir
verschiedenen Punkten schon erkennen können, daß es bei der
der Ableitungsregeln, die die Ableitung des Schlußes erlauben,
gewisse Freiraum gibt. Eigentlich gibt es zu allen Regeln, die wir
aufgrund offensichtlicher Analogien mit den Prinzipien des
Sequenzenkalküls gewählt haben, Alternativen, und in vielen Fä
es Alternativen, die den oben verwendeten Regeln vorzuziehen
(weil sie eleganter oder leichter zu formulieren sind, kürzere
Ableitungen ermöglichen, usm.).

Zwei solche Alternativen wollen wir hier schon gleich als Teile de
diesem Abschnitt zu entwickelnden Systems adoptieren. Die er
Alternative ersetzt die in (153) als letzte verwendete Regel &-E'.
waren auf die Regel &-E' angewiesen, weil wir gleich am Anfang
Ableitung (153) die Formeln p und q v r als zusätzliche Annahr
eingeführt hatten. Im Nachhinein ist aber klar, daß wir so nich
vorgehen müssen. Denn wir hätten diese beiden Formeln schon
am Anfang unserer Ableitung direkt aus der Konjunktion p & (q
ableiten können. Solche Ableitungen sind sicher legitim, denn
eine Konjunktion wahr ist, dann müssen ihre Konjunkte ebenfal
sein.

Wir führen diese Regeln, die in der Literatur beide mit "&-E" ("& Eliminierung") bezeichnet werden, gleich ein. (N.B. Die hier gege Formulierung setzt voraus, daß die Konjunktion eine binäre Op ist, d.h. daß Konjunktionen, die wir in der obigen Diskussion als & A_n repräsentiert haben, immer durch wiederholte Bildung zweistelliger Konjunktionen aufgebaut sind und auch eine entsprechende Klammerungsstruktur aufweisen. Wir gehen eb wieder davon aus, daß auch mehrgliedrige Disjunktionen aus zweistelligen Disjunktionen aufgebaut sind.) Wir präsentieren d Regeln als zwei Varianten derselben Regel &-E; die erste Variant erlaubt die Inferenz des ersten Konjunkts einer Konjunktion un zweite die Inferenz des zweiten Konjunkts. Wir verwenden dies Notation, die schon in der Formulierung der Regel (v-E) benutzt

(154) &-E(liminierung)

(&-E1)

n	$h_1,...,h_g$	A & B	...
m	$h_1,...,h_g$	A	n, &-E1

(&-E2)

n	$h_1,...,h_g$	A & B	...
m	$h_1,...,h_g$	B	n, &-E2

Wie aus dieser Beschreibung klar sein sollte, wird die Regel folgendermaßen angwendet. Kommt innerhalb einer Ableitung irgendwo eine Zeile mit einer Konjunktion A & B vor, so kann ma nächste Zeile entweder A oder B eintragen. Diese Formel hängt von denselben Annahmen ab, von denen die Konjunktion abhä

Unter Anwendung dieser Regel können wir die Ableitung (153) die etwas einfachere Ableitung (155) ersetzen.

(155)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	1	p	1,&-E
	3	1	q v r	1,&-E
	4	4	q	An

5	4	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	4, v-I'
6	6	r	An
7	6	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	6, v-I'
8	1	((p & q) v r) v (p & q) v r v q	3,4,5,6,7, v-E
9	1	((p & q) v r) v (p & q) v r v p	2, v-I'
10	1	((p & q) v r) v (p & q) v r	8,9, &-I'
11	1	(p & q) v r	10, DD

Die neue Ableitung ist um einen Schritt kürzer, weil jetzt der a Schluß schon in Zeile 11 nur noch von der Prämisse abhängt.

Noch einen Kommentar zu dem Verhältnis zwischen der neuen &-E und der bisherigen Regel &-R', die sie ersetzt. Die Regel &-R' daß wir eine Ableitung von einer Formel B aus den Prämissen A_1, ..., A_n, C & D, C und D als Ableitung von B aus A_1, ..., A_n und C betrachten dürfen. Die Rechtfertigung dieser Regel folgt nun di der Regel &-E: Weil sowohl C als auch D logisch aus C & D folgen, sich eine Ableitung von B aus A_1, ..., A_n, C & D, C und D direkt in Ableitung von B aus A_1, ..., A_n, C & D verwandeln, solange die Re verfügbar ist: Wir leiten zuerst mit Hilfe dieser Regel C und D aus ab und kopieren darunter dann die Ableitung von B aus A_1, ..., A D, C und D, über die wir nach Annahme schon verfügen.

Eine zweite Vereinfachung ergibt sich, wenn wir die Regel &-I' d Regel ersetzen, nach der aus schon vorhandenen Zeilen mit den A und B die Konjunktion A & B abgeleitet werden kann:

(156) &-I(ntroduktion)

n	$h_1,\ldots,h_g$	A	...
m	$i_1,\ldots,i_k$	B	...
p	$h_1,\ldots,h_g$, $i_1,\ldots,i_k$	A & B	n,m, &-I

Mit Hilfe von (&-I) können wir die in der Schlußformel von (89) vorkommende Konjunktion direkt aus den Konjunkten ableiten. lassen sich die ziemlich komplizierten Formeln in den Zeilen 5, 7 und 10 von (155) vermeiden.

(157)	1	1	p & (q v r)	Pr
	2	1	p	1,&-E
	3	1	q v r	1,&-E
	4	4	q	An
	5	1,4	p & q	2,4,&-I
	6	1,4	(p & q) v r	5, v-I'
	7	7	r	An
	8	7	(p & q) v r	6, v-I'
	9	1	(p & q) v r	3,4,6,7,8, v-E

Zuletzt hier noch eine Neuformulierung der Regel v-I', die sich ausschließlich auf zweistellige Disjunktionen bezieht - d.h. nach zwistellige Disjunktionen aus ihhren Disjunkten abgeleitet werd dürfen. Auch hier gibt es zwei Varianten, eine für das erste un für das zweite Disjunkt. Wir nennen die Regel "v-I(ntroduktion)' hat die zwei Varianten v-I1 und v-I2:

(158) v-I(ntroduktion)

(v-I1)

n	$h_1,\ldots,h_g$	A	...
m	$h_1,\ldots,h_g$	A v B	n, v-I1

(v-I2)

n	$h_1,\ldots,h_g$	B	...
m	$h_1,\ldots,h_g$	A v B	n, v-I2

N.B. Die Ersetzung von v-I' durch v-I hat auf die Ableitung in (1 keinen wesentlichen einfluß. Der Unterschied besteht lediglich daß "v-I'" in der Annotation ganz rechts in Zeile 5 "v-I'" durch " und in der Annotation in Zeile 7 durch "v-I2" ersetzt wird.

In dem Argument (89) kommen nur die Junktoren & und v vor haben bisher nur für diese Junktoren Deduktionsregeln formuli die vollständige Formulierung eines Systems der natürlichen D brauchen wir natürlich auch Regeln für die sonstigen Junktoren für die Quantoren und die Identität. Auch diese weiteren Regel sich systematisch aus den Prinzipien des Sequenzenkalküls des Abschnitts ableiten. Aber wiederum ist es in einigen Fällen mög Regeln zu vereinfachen; insbesondere können manche Deduktic durch Inferenzregeln ersetzt werden.

Betrachten wir zuerst den Fall des Prinzips ($\rightarrow$-L) des Sequenzen nachdem (in unserer jetzigen "Ableitungsterminologie") die Kor von (i) einer Ableitung von B v C aus A_1, ..., A_n und C $\rightarrow$ D, und (Ableitung von B aus A_1, ..., A_n, C $\rightarrow$ D und D, als Ableitung von B aus A_1, ..., A_n und C $\rightarrow$ D betrachtet werden darf. Dieses Prinzi direkt aus der seit langer Zeit innerhalb der Logik bekannten Inferenzregel Modus Ponens, nach der aus zwei Formeln C und C Formel D geschlossen werden darf. (Daß diese Regel nie zu unerwünschten Schlüssen führen kann - die falsch sein könnter die zwei Prämissen, aus denen sie gezogen werden, wahr wären direkt aus der klassischen Interpretation des Junktors $\rightarrow$. Denn dieser Interpretation kann D nicht falsch sein, wenn C und C $\rightarrow$ I wahr sind.)

Ist nun Modus Ponens eine unserer Inferenzregeln, dann läßt si Gültigkeit des obigen Prinzips leicht verifizieren. Denn nehmen wir haben eine Ableitung von B aus A_1, ..., A_n, C $\rightarrow$ D und D. Dan es auch eine Ableitung von B aus A_1, ..., A_n, C $\rightarrow$ D und C, denn w können zuerst D aus C $\rightarrow$ D und C ableiten und dann die Ableitur aus A_1, ..., A_n, C $\rightarrow$ D und D daran hängen. Es gibt aber auch eine Ableitung von B aus A_1, ..., A_n, C $\rightarrow$ D und B - trivialerweise, denr Schluß B ist in diesem Fall identisch mit einer der Prämissen. Da es aber nach der Regel v-E auch eine Ableitung von B aus A_1, ..., A D und B v C. Nach Annahme vefügen wir aber über eine Ableitu B v C aus A_1, ..., A_n und C $\rightarrow$ D. Wenn wir jetzt die Ableitung von A_1, ..., A_n, C $\rightarrow$ D und B v C mit dieser letzten Ableitung verknüpf bekommen wir eine Ableitung von B aus A_1, ..., A_n und C $\rightarrow$ D.

Für das Prinzip, das sich auf das Vorkommen von C $\rightarrow$ D als Disj Schlußfrormel bezieht - eine Ableitung von B v D aus A_1, ..., A_n u kann auch als Ableitung von B v (C $\rightarrow$ D) aus A_1, ..., A_n betrachte werden - bietet sich eine ähnlich naheliegende Vereinfachung n und in vielen Systemen der Natürlichen Deduktion wird die Reg auch in dieser Form beibehalten; sie wird als die "Regel des Konditionalen Beweises" ("Conditional Proof", "CP") bezeichnet. W folgen dieser Praxis und kommen damit für den Konditionaljunk dem folgenden Regelpaar:

(159) M(odus) P(onens) (= ($\rightarrow$,E))

n	$h_1,\ldots,h_g$	$A \rightarrow B$	....
	.		
m	$i_1,\ldots,i_k$	A	...
	.		
	.		
p	$h_1,\ldots,h_g, i_1,\ldots,i_k$	B	n, m, MP

Diese Formulierung zeigt, daß wenn MP auf A und $A \rightarrow B$ angewe wird, die inferierte Formel B als sowohl von den Zeilen, die A voraussetzt, abhängt als auch von denen, die $A \rightarrow B$ voraussetzt, abhängt.

(N.B. Die Formulierung könnte suggerieren, daß MP nur dann angewendet werden darf, wenn die Zeile mit $A \rightarrow B$ der Zeile mit vorangeht. Dies ist nicht gemeint. Die Reihenfolge der Prämisse keiner Bedeutung. MP kann genausogut angewendet werden, w Konditional dem Antezedent in der Ableitung folgt.)

(160) C(onditional) P(roof)

n	n	A	An
	.		
	.		
m	$h_1,\ldots,h_g$, n	B	....
p	$h_1,\ldots,h_g$	$A \rightarrow B$	n,m, CP

Wie aus dieser Formulierung hervorgeht, erlaubt uns die Ableit B aus A und zusätzlichen Prämissen A_1, ..., A_g mit Zeilennummer $h_1,\ldots,h_g$ $A \rightarrow B$ als aus (nur) A_1, ..., A_g abgeleitet zu betrachten.

Als Anwendungsbeispiel dieser beiden Regeln schauen wir uns d
Ableitung von $p \rightarrow r$ aus $p \rightarrow q$ und $q \rightarrow r$ an:

(161)	1	1	$p \rightarrow q$	Pr
	2	2	$q \rightarrow r$	Pr
	3	3	p	An
	4	1,3	q	1,3 MP
	5	1,2,3	r	2,4 MP
	6	1,2	$p \rightarrow r$	3,5 CP

Kommentar: Wenn es darum geht, ein Konditional abzuleiten, is
immer eine fruchtbare Strategie, das Antezedens des Konditiona
anzunehmen und zu versuchen, mit Hilfe dieser zusätzlichen A
das Konsequenz abzuleiten. Gelingt dies, so kann dann mit Hilfe
geschlossen werden, daß das Konditional ohne die zusätzliche A
ableitbar ist.

Als nächsten Junktor betrachten wir die Negation. Wiederum w
möglich, die Ableitungsregeln, die sich unmittelbar aus den Pri
des Sequenzenkalküls ergeben, als Teil des Regelbestandes unse
System der natürlichen Deduktion aufzunehmen, aber bestehen
Alternativen. Es gibt sogar eine nicht ganz geringe Anzahl von
Alternativen, die wir aber nicht alle untersuchen werden. Wir
beschränken uns statt dessen auf die beiden Regeln, die wir in
System einverleiben, die "Regel der Doppelten Negation" und da
"Prinzip der Reductio ad Absurdum"

Die erste Regel basiert auf der schlichten Beobachtung, daß eine
A und ihre doppelte Negation $\neg\neg A$ logisch äquivalent sind, und
deswegen die zweite Formel aus der ersten und auch die erste a
zweiten ableiten darf. Die Regel kommt also in zwei Varianten:

(162) D(oppelte) N(egation)

(DN1)

m	$h_1,\ldots,h_g$	A	....
n	$h_1,\ldots,h_g$	$\neg\neg A$	m, DN1

(DN2)

m	$h_1,\ldots,h_g$	$\neg\neg A$	....
n	$h_1,\ldots,h_g$	A	m, DN2

Die zweite Regel ist wiederum eine Deduktionsregel. Sie entspri einem Prinzip, das für die Logik insgesamt von zentraler Bedeut in ihrer Gechichte eine wichtige Rolle gespielt hat und im Beson auch in einer engen Beziehung zur Tableaumethode steht: Um vorgegebenen Prämissen A_1, ..., A_n einen Schluß B abzuleiten, re zu zeigen, daß seine Negation $\neg B$ nicht mit den Prämissen A_1, ..., kompatibel ist, und dazu reicht es wiederum, aus A_1, ..., A_n und einen Widerspruch abzuleiten. Mit anderen Worten, die Ableitu (unverkennbaren) Widerspruches aus A_1, ..., A_n und $\neg B$ darf als Ableitung von B aus A_1, ..., A_n betrachtet werden.

Wir adoptieren eine Form dieses Prinzips, in der man unter ein "Unverkennbarer Widerspruch" eine beliebige Formel der Form C versteht. Schematisch kann die Regel wie folgt dargestellt werd

(163) R(eductio) A(d) A(bsurdum)

n	n	$\neg B$	An
	. .		
m	$h_1,\ldots,h_g$, n	$C \& \neg C$	....
p	$h_1,\ldots,h_g$	B	n,m, RAA

Bei der Anwendung der Regel RAA wird also eine Annahme, die schon abgeschlossenen Ableitung als Prämisse verfügbar war, e in dem Sinne, daß die neue, aus der Anwendung entstehende Ze länger von dieser Annahme abhängig ist. In dieser Hinsicht ähn Regel RAA der Regel CP.

Um zu zeigen, wie diese letzten beiden Regeln verwendet werde können, leiten wir aus den Prämissen $p \rightarrow q$ und $q \rightarrow r$ den Schl $\neg r \rightarrow \neg p$ ab.

(164)	1	1	$p \rightarrow q$	Pr
	2	2	$q \rightarrow r$	Pr
	3	3	$\neg r$	An
	4	4	$\neg\neg p$	An
	5	1,4	p	4, DN2
	6	1,4	q	1,5 MP
	7	1,2,4	r	2,6 MP
	8	1,2,3,4	$r \,\&\, \neg r$	3,7 &-I
	9	1,2,3	$\neg p$	4,8 RAA
	10	1,2	$\neg r \rightarrow \neg p$	3,9 CP

Es fehlen jetzt nur noch die Junktorenregeln, die sich auf den Ju beziehen. Diese Regeln lassen sich direkt aus den schon definie Regel für $\rightarrow$ und & ableiten, indem man von der Äquivalenz von mit $(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$ Gebrauch macht. Auf diese Weise kommen zu den Regeln ($\leftrightarrow$ -I) und ($\leftrightarrow$ -E). Diese Regeln sind in (164) defir Wir wiederholen zugleich die oben eingeführten Regeln, die zus mit den neuen Regeln ($\leftrightarrow$ -I) und ($\leftrightarrow$ -E) unser System der Natür Deduktion für die Aussagenlogik ausmachen.

(165)

&-Introduktion

n	$h_1,\ldots,h_g$	A	...
m	$i_1,\ldots,i_k$	B	...
p	$h_1,\ldots,h_g,\ i_1,\ldots,i_k$	$A \,\&\, B$	n,m, &-I

&-Eliminierung

(&-E1)

n	$h_1,\ldots,h_g$	$A \,\&\, B$	...
m	$h_1,\ldots,h_g$	A	n, &-E1

(&-E2)

n	$h_1,\ldots,h_g$	A & B	...
m	$h_1,\ldots,h_g$	B	n, &-E2

v-Introduktion

(v-I1)

n	$h_1,\ldots,h_g$	A	...
m	$h_1,\ldots,h_g$	A v B	n, v-I1

(v-I2)

n	$h_1,\ldots,h_g$	B	...
m	$h_1,\ldots,h_g$	A v B	n, v-I2

(v-E)	n	$h_1,\ldots,h_g$	C V D	An
	.			
	.			
	p	p	C	An
	.			
	.			
	q	p, $i_1,\ldots,i_k$	B	...
	.			
	.			
	r	r	D	An
	.			
	.			
	s	r, $j_1,\ldots,j_f$	B	...
	m	$h_1,\ldots,h_g$, $i_1,\ldots,i_k$, $j_1,\ldots,j_f$	B	n, v-I'

Modus Ponens (= $\rightarrow$-Eliminierung)

n	$h_1,\ldots,h_g$	$A \rightarrow B$	....
	.		
m	$i_1,\ldots,i_k$	A	...
	.		
	.		
p	$h_1,\ldots,h_g, i_1,\ldots,i_k$	B	n, m, MP
	.		

Conditional Proof (= $\rightarrow$-Introduktion)

n	n	A	An
	.		
	.		
m	$h_1,\ldots,h_g$, n	B	....

Doppelte Negation

(DN1)

m	$h_1,\ldots,h_g$	A	....
n	$h_1,\ldots,h_g$	$\neg\neg A$	m, DN1

(DN2)

m	$h_1,\ldots,h_g$	$\neg\neg A$	....
n	$h_1,\ldots,h_g$	A	m, DN2

Reductio Ad Absurdum

n	n	$\neg B$	An
	. .		
m	$h_1,\ldots,h_g$, n	$C \,\&\, \neg C$	....
p	$h_1,\ldots,h_g$	B	n,m, RAA
p	$h_1,\ldots,h_g$	$A \rightarrow B$	n,m, CP

$\leftrightarrow$ -Introduktion

n	$h_1,\ldots,h_g$	$A \rightarrow B$	
	. .		
m	$i_1,\ldots,i_k$	$B \rightarrow A$	....
p	$h_1,\ldots,h_g$, $i_1,\ldots,i_k$	$A \leftrightarrow B$	n,m, $\leftrightarrow$-I

$\leftrightarrow$ -Eliminierung

($\leftrightarrow$ - E1)

n	$h_1,\ldots,h_g$	$A \leftrightarrow B$	
	. .		
m	$h_1,\ldots,h_g$	$A \rightarrow B$	n, $\leftrightarrow$-E1
	....		

($\leftrightarrow$ - E2)

n	$h_1,\ldots,h_g$	$A \leftrightarrow B$	
	. .		
m	$h_1,\ldots,h_g$	$B \rightarrow A$	n, $\leftrightarrow$-E2

2.2 Natürliche Deduktion für die Prädikatenlogik

Wenden wir uns jetzt den Regeln für die Quantoren zu. Auch h es möglich, sich weitgehend an den Prinzipien des Sequenzenka halten. Aber wiederum gibt es attraktivere Alternativen. Dies g namentlich für die Regel, die dazu dient, aus ∀-quantifizierten I Inferenzen zu ziehen, und die Regel, die es erlaubt, eine Existen aus anderen Formeln abzuleiten. Was die Inferenzen aus einer quantifizierten Formel betrifft, so reicht, wie es sich herausstellt offensichtlich korrekte Regel aus, nach der man aus der Formel (beliebige Formeln von der Form C(t) ableiten kann. (Wobei wiec ein geschlossener Term ist.) Analog ist das Problem, wie Formel der Form (∃x) C(x) aus anderen abzuleiten sind, vollständig durc Regel gelöst, nach der (∃x) C(x) aus beliebigen Formeln der Form geschlossen werden darf. Offensichtlich sind beide Regeln Inferenzregeln. Wir stellen die Regeln im schon bekannten Form

(166)

(∀-E)

n	$h_1, ..., h_g$	(∀x) C(x)	...
m	$h_1, ..., h_g$	C(t)	n, ∀-E

(∃-I)

n	$h_1, ..., h_g$	C(t)	...
m	$h_1, ..., h_g$	(∃x) C(x)	n, ∃-I

Nicht so einfach ist es, zu bestimmen, wie die Regeln aussehen s es die Inferenzen aus Existenzformeln ermöglichen, bzw, es erla eine ∀-quantifizierte Formel aus anderen Formeln abzuleiten. D Regeln sollen den beiden "komplizierten" Quantorenprinzipien (Sequenzenkalküls entsprechen und in der Tat haben die Regeln, hier formulieren, eine enge Beziehung zu diesen Prinzipien des Sequenzenkalküls.

Zuerst befassen wir uns mit der Regel, die es ermöglicht, Formel der Form $(\forall x)\ C(x)$ abzuleiten. Betrachten wir noch einmal das betreffende Prinzip des Sequenzenkalküls. In der "ableitungsorientierten" Formulierung, die wir in diesem Absch schon einige Male verwendet haben, lautet sie:

(167) Eine Ableitung von B_1 v .. v $(\forall x)\ C(x)$ v .. v B_m v $C(a)$ aus Prämissen $A_1, ..., A_n$ darf als Ableitung von B_1 v .. v $(\forall x)\ C(x)$ v .. v B_m aus $A_1, ..., A_n$ betrachtet wer angenommen, daß a in den A_i, in den B_j und in $(\forall x)\ C(x$ nicht vorkommt.

Es sei hier auf eine in der in (163) wiederverwendeten Notation implizite Konvention hingewiesen, nach der die Formulierung a besonderen Fall abdeckt, in dem m = 0, d.h. wenn der Schluß de zweiten Arguments nur aus $(\forall x)\ C(x)$ besteht und der des erste Arguments die Disjunktion $(\forall x)\ C(x)$ v $C(a)$ ist.

Eine Regel, die auf den ersten Blick etwas schwach erscheint, ist (168):

(168) Eine Ableitung von $C(a)$ aus $A_1, ..., A_n$ darf als Ableitung $(\forall x)\ C(x)$ aus $A_1, ..., A_n$ betrachtet werden.

(Diese Regel ist deshalb höchstens so stark wie der genannte So von (167) weil $C(a)$ die Disjunktion $(\forall x)\ C(x)$ v $C(a)$ logisch impli und weil diese Disjunktion aus $C(a)$ auch direkt mittels (V-I) ab werden kann. Existiert eine Ableitung von $C(a)$ aus $A_1, ..., A_n$, sc sich diese durch Anwendung von v-I direkt zu einer Ableitung $(\forall x)\ C(x)$ v $C(a)$ aus $A_1, ..., A_n$ erweitern, und der Sonderfall von erlaubt uns dann, zu schließen, daß wir über eine Ableitung von $C(x)$ aus $A_1, ..., A_n$ verfügen.)

Wie wir am Ende dieses Abschnitts zeigen werden, sind die Rege der erwähnte Sonderfall und die Regel (168) alle miteinander äquivalent. Wegen ihrer einfacheren und eleganteren Formuli wählen wir die Regel (168). Sie heißt "$\forall$-Introduktion" (($\forall$-I)). (gibt die schematische Darstellung.

(169) (∀-I)

n	$h_1, ..., h_g$	C(a)	...
m	$h_1, ..., h_g$	(∀x) C(x)	n, ∀-I

(Bedingung: a darf weder in (∀x) C(x) noch in den Formeln d
Zeilen $h_1, ..., h_g$ vorkommen.)

Das Prinzip des Sequenzenkalküls, das sich auf Prämissen von d
(∃x) C(x) bezieht und das wir in (170) nochmal als eine Regel für
Ableitungen formulieren, läßt sich auf ähnliche Art vereinfache
wir (167) zu (168) vereinfacht haben. Die Vereinfachung, die wi
Regel adoptieren, ist in (170) definiert.

(170) (∃-E)

n	$h_1, ..., h_g$	(∃x) C(x)	...
m	m	C(a)	An
p	$i_1, ..., i_k$, m	B	.....
q	$i_1, ..., i_k, h_1, ..., h_g$	B	n, ∃-E

(Bedingung: a darf weder in (∃x) C(x) noch in den Formeln d
Zeilen $h_1, ..., h_g$ vorkommen.)

(170) ist so zu verstehen: Ist B aus der Annahme C(a) (zusamm
den Zeilen $i_1, ..., i_k$ als zusätzlichen Prämissen) abgeleitet und es
der Ableitung ebenfalls eine Zeile, in der die Formel (∃x) C(x) als
den Zeilen $h_1, ..., h_g$ abhängend vorkommt, dann können wir B a
(∃x) C(x) statt aus C(a) abgeleitet eintragen. In der neuen Zeile
dann B als sowohl von den zusätzlichen Prämissen der ersten A
alsa auch von den Zielen abhängend vermerkt werden, von der
(∃x) C(x) in der Zeile n abhängt. (Die Abhängigkeit von der Ann
C(a) bestet aber ncht länger.)

Wie die oben eingeführten Quantorenregeln bei Ableitungen iM "Natürliche deduktion"-Format eingesetzt werden, zeigt sich im folgenden Beispiel. Wir betrachten noch einmal das Argument

(115) $(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y))) \vDash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R($

Unsere Ableitung fängt mit der einzigen Prämisse des Argument

(171)

1	1	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$	Pr

Die einzige Möglichkeit, aus dieser Prämisse Schlüsse zu ziehen, darin, daß wir die Formel mit einem (neuen) Parameter instanz Das heißt, in der nächsten Zeile tragen wir eine solche Instanz a zusätzliche Annahme ein:

(172)

1	1	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$	Pr
2	2	$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a)))$	An

Aus der zweiten Zeile können wir nun mit der Regel (&-E) die be Konjunkte ableiten:

(173)

1	1	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$	Pr
2	2	$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a)))$	An
3	2	$Q(a)$	2, &-E1
4	2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a))$	2, &-E2

Um den Schluß $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$ abzuleiten, reicht wegen der Regel ($\forall$-I) aus, eine Instanz $P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b,y)$ abzuleiten (wobei b nicht in den Zeilen vorkommt, von denen d Instanz aufgrund ihrer Ableitung als abhängig betrachtet werd Das Konditional $P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b,y))$ können wir nun aber der Regel (CP) ableiten, indem wir das Antezedens P(b) lals Ann hinzunehmen und mit seiner Hilfe das Konsequenz $(\exists y)(Q(y) \,\&$ I ableiten. So ist der nächste Schritt motiviert:

(174)

1	1	$(\exists y)(Q(y) \ \& \ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$	Pr
2	2	$Q(a) \ \& \ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a)))$	An
3	2	$Q(a)$	2, &-E1
4	2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a))$	2, &-E2
5	5	$P(b)$	An

Wir können nun aus $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a))$ mit ($\forall$-E) die Instanz $P(b) \rightarrow R(b,a)$ und dann aus dieser Formel und $P(b)$ mit MP R(b,a ableiten. Aus $Q(a)$ und $R(b,a)$ schließen wir dann unter Anwenc (&-I) die Konjunktion $Q(a) \ \& \ R(b,a)$ und daraus leiten wir mit ($\exists$- Formel $(\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b,y))$ ab:

(175)

1	1	$(\exists y)(Q(y) \ \& \ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$	Pr
2	2	$Q(a) \ \& \ (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a)))$	An
3	2	$Q(a)$	2, &-E1
4	2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a))$	2, &-E2
5	5	$P(b)$	An
6	2	$P(b) \rightarrow R(b,a)$	4, $\forall$-E
7	2,5	$R(b,a)$	5,6, MP
8	2,5	$Q(a) \ \& \ R(b,a)$	3,7, &-I
9	2,5	$(\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b,y))$	8, $\exists$-I

Jetzt wenden wir die Regel CP an. So bekommen wir die Formel $P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(b,y))$ und werden gleichzeitig die zusätzlich Annahme (5) wieder los. Wir können dann unter Verwendung Regel ($\forall$-I) die Generalisierung $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(x,y)))$ als abgeleitet eintragen.

(176)

1	1	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$	Pr
2	2	$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a)))$	An
3	2	$Q(a)$	2, &-E1
4	2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a))$	2, &-E2
5	5	$P(b)$	An
6	2	$P(b) \rightarrow R(b,a)$	4, ∀-E
7	2,5	$R(b,a)$	5,6, MP
8	2,5	$Q(a) \,\&\, R(b,a)$	3,7, &-I
9	2,5	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b,y))$	8, ∃-I
10	2	$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b,y))$	9, CP
11	2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$	10, ∀-I

Wir haben jetzt den Schluß von (115) abgeleitet, aber nicht aus Prämisse (1) sondern aus der Annahme (2). Der letzte Schritt c Ableitung ist eine Anwendung von (∃-E), die uns erlaubt, aus de vollzogenen Ableitung von $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$ aus (2 schließen, daß diese Formel auch schon aus der Existenzformel (Instanz (2) ist:

(177)

1	1	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$	Pr
2	2	$Q(a) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a)))$	An
3	2	$Q(a)$	2, &-E1
4	2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,a))$	2, &-E2
5	5	$P(b)$	An
6	2	$P(b) \rightarrow R(b,a)$	4, ∀-E
7	2,5	$R(b,a)$	5,6, MP
8	2,5	$Q(a) \,\&\, R(b,a)$	3,7, &-I
9	2,5	$(\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b,y))$	8, ∃-I
10	2	$P(b) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(b,y))$	9, CP
11	2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$	10, ∀-I
12	1	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$	11, ∃-E

Zuletzt die Regeln für die Identität. Diese ergeben sich aber dir den Identitätsprinzipien des Sequenzenkalkül, die sowieso schon Form haben, die für die Natürliche Deduktion besonders geeign

Auch in diesem Fall verwenden wir für ihre Benennung die Ter "Eliminierung" und "Introduktion" - "Eliminierung" für die vorhi genannte Regel, die eine Formel von der Form s = t als Prämisse verwendet, und "Introduktion" für die Regel (=,Ref), die dazu di Gleichungen einzuführen.

(178) (Die Regeln (=-E) und (=-I))

(=-E)

n	$h_1, \ldots, h_g$	s = t	...
m	$i_1, \ldots, i_k$	C(s)	....
p	$h_1, \ldots, h_g, i_1, \ldots, i_k$	C(t)	n,m, (=-E)

(=-I)

n	n	t = t	n, =-I

2.3 Regeläquivalenzen.

Unser Versuch, die Regeln des hier entwickelten Systems der Natürlichen Deduktion systematisch aus den Regeln des Sequez herzuleiten, war nur teilweise erfolgreich. An mehreren Stellen wie wir gesehen haben, bei der Umsetzung einer Sequenzen-Kal Regel mehrere Optionen; unsere Wahl wurde dann oft weniger systematischen Überlegungen, als von solchen bestimmt, die die "Eleganz" der Formulierung der Regel oder auch die Einfachheit Anwendung betrafen. Ein solcher Fall war die Sequenzenkalkül (∀-R). Auf S. 112 haben wir drei mögliche Regeln erwähnt, durc man diese Regel in einem System der Natürlichen Deduktion er könnte, (die Regeln (167), (168) und (169)). In unserer Diskus dieser drei Regeln versprachen wir, deren Gleichwertigkeit spät nachzuweisen. Dieses wollen wir jetzt tun. Die dazu erforderlic Überlegungen sind paradigmatisch für die Art von Beweisführu der gezeigt werden kann, daß eine Regel R1 eine andere Regel R subsumiert. (R1 subsumiert R2 bzgl. eines Regelsystems S, wenn Ableitung im System S + R2 eine Ableitung im System S + R1 ent

Wir haben schon gesehen, daß (168) einen Sonderfall von (167) darstellt. Daraus folgt direkt, dass (168) immer (d. h. bzl. belie Systeme S) von (167) subsumiert ist. Auch wurde schon argum daß bzl eines jeden Systems, das die Junktorenregeln von Absch enthält, die Regel (168) die Regel (169) subsumiert. Um die Gleichwertigkeit der drei Regeln nachzuweisen (bezüglich eines Systems S), brauchen wir also nur noch zu zeigen, daß (167) vo subsumiert ist.

Wiederholen wir die beiden Regeln noch einmal:

(167) Eine Ableitung von B_1 v .. v (∀x) C(x) v .. v B_m v C(a) aus Prämissen A_1, ..., A_n darf als Ableitung von B_1 v .. v (∀x) C(x) v .. v B_m aus A_1, ..., A_n betrachtet wer angenommen, daß a in den A_i, den B_j und in (∀x) C(x) nicht vorkommt.

(169) (∀-I)

n	h_1, ..., h_g	C(a)	...
m	h_1, ..., h_g	(∀x) C(x)	n, ∀-I

(Bedingung: a darf weder in (∀x) C(x) noch in den Formeln d Zeilen h_1, ..., h_g vorkommen.)

Zu zeigen ist, daß wenn S ein Regelsystem ist, das die im vorigen Abschnitt 2.1 gewählten Regeln für den Aussagenkalkül enthält, S + (167) beweisbare Argument auch in S + (169) beweisbar ist. dies nachzuweisen, reicht es, zu zeigen, daß jeder Inferenzschrit einer Ableitung in S + (167), der zu einer neiuen Zeile Z fürht, in Regel (167) angewandt wird, durch eine Teilableitung inm Syste S + (169) ersetzt werden kann, deren letzte Zeile wiederum Z ist. (Genauer, wenn Z von der Form: "n i_1 ... i_k A (167)" ist, dan letzte Zeile der Teilableitung die Form "m i_1, ..., i_k A ..." (d.h. enthält dieselbe Formel A und zwar als abhängig von denselben vorangehenden Zeilen i_1, ..., i_k).

Nehmen wir also an, daß in einer Ableitung A von bisher p Zeile Regel (167) angewendet wird. Genau was bei einer solchen An passieren sollte, haben wir zwar nicht explizit diskutiert, aber a

recht ausführlichen Überlegungen zu den anderen im letzten A
eingeführten Regeln sollten die Einzelheiten einer solchen Anwe
eigentlich klar sein. (179) zeigt die Anwendung, die, wie angen
zu der p-ten Zeile von A führt. Wir nehmen dabei an, daß die m
m+2-stellige Disjunktionen durch wiederholte Bildung aus 2-ste
Disjunktionen gebildet wurden, und zwar wie durch die Klamme
(179) angedeutet. (Wesentlich ist diese letztere Annahme nicht
andere Klammerung kann das folgende Argument ebensogut
durchgeführt werden.)

(179)

p h_1,,,,hg (.(B_1 v B_2) v .. v B_i) v (∀x) C(x)) v (B_{i+1} v (.. v B_m).)) v
.
q h_1,,,,hg (.(B_1 v B_2) v .. v B_i) v (∀x) C(x)) v (B_{i+1} v (.. v B_m).))

Zur Vereinfachung der Notation kürzen wir die Disjunktion
(.(B_1 v B_2) v .. v B_i) zu B^1 und die Disjunktion (B_{i+1} v .. v B_m).) zu
Damit kriegt die Formel von Zeile q die Form (B^1 v (∀x) C(x)) v B^2
und die Formel von Zeile p die Form ((B^1 v (∀x) C(x)) v B^2) v C(a)
(179) hat damit die Gestalt:

(180)

p h_1,,,,hg ((B^1 v (∀x) C(x)) v B^2) v C(a) ...

q h_1,,,,hg (B^1 v (∀x) C(x)) v B^2 p, (163)

Das folgende Argument (das zeigt, daß sich der Schritt, der in (1
p in Zeile q überführt, durch Regeln statt (167) die Regel (169)
Verfügung steht, durch eine Ableitung in S + (169) ersetzen läß
zum Teil auf der Möglichkeit, mit den Regeln des Aussagenkalkül
A v B und ¬A abzuleiten. Weil diese Ableitung etwas abstrus ist,
werden wir separat zeigen. Haben wir Möglichkeit, B aus A v B u
abzuleiten, einmal nachgewiewsen, dann ist auch die Konstrukti
beabsichtigten Ableitung nicht weiter problematisch.

Wir wollen also mit den uns verfügbaren aussagenlogischen Reg
A v B und ¬A die Formel B ableiten. (Daß diese Inferenz korrekt

selbstverständlich, denn sind A v B und ¬A beide wahr, so muß wahr sein.) Die Ableitung sieht wie folgt aus:

(181)

n	$h_1, ..., h_g$	A v B	...
m	$i_1, ..., i_k$	¬A	....
p	p	¬B	An
p+1	p+1	A	An
P+2	p+1, $h_1, ..., h_g$	A & ¬A	p, p+1, &-I
p+3	p+1, $h_1, ..., h_g$	B	p, p+2, RAA

Der letzte Schritt bedarf eines Kommentars. Er mag auf den ers suspekt erscheinen. Denn die Formel ¬B war ja gar nicht in der Ableitung der widerschprüchlichen Formel A & ¬A involviert! G gesprochen gibt es hier eigentlich zwei Probleme. Erstens ging a unseren bisherigen Formulierungen nicht klar hervor, daß die l RAA auch für Fälle wie diesen gemeint war. Diese Unklarheit kö und müssen wir jetzt beseitigen. Das zweite Problem ist, ob eine Abwendung der Regel denn überhaupt korrekt ist. Die Antwort diese zweite Frage ist bejahend. Denn im Allgemeinen ist die Rechfertigung einer Anwendung der Regel RAA diese: Aus einer mehreren Formeln ist ein unverkennbarer Widerspruch abgele worden. Damit ist gezeigt worden, daß die Formel oder Formeln (alle zugleich) wahr sein können. Denn gäbe es die Möglichkeit, gemeinsam zu verifizieren, dann müßte (im gegebenen Modell) aus ihr oder ihnen abgeleitete Schluß wahr sein, was bei einem Widerspruch aber nicht sein kann. Diese Überlegung ist die Rechtfertigung dafür, daß man eine Prämisse P aus der gegeben Menge herausznimmt, und schließt, daß diese Prämisse falsch se wenn alle anderen Prämissen in der Menge wahr sind. RAA mac diesem Prinzip Gebrauch, indem man hier davon ausgeht, dass l Form ¬C ist. Es kann dann geschlossen werden, daß ¬C falsch, als wahr sein muß, wenn die anderen Prämissen, die für das errrei Widerspruchs nötig waren, wahr sind. In der Anwendung von I wird dies formal expliziert, indem in einer neuen Zeile C als von anderen Prämissen abhängig vermerkt wird.

Der Punkt, um den es jetzt geht, ist folgender: Für die gerade n einmal wiederholte Rechtfertigung von RAA ist es bedeutungslos Annahme ¬C bei der Ableitung des Widerspruchs wirklich benu wurde. War das nicht der Fall, so ist der Schluß, daß C wahr seir falls die anderen Prämissen, auf denen der Widerspruch beruht wahr sind, immer noch gültig, sei es in einem trivialen, "degene Sinn. Denn die Tatsache, daß der Widerspruch aus diesen Präm alleine abgeleitet werden kann, zeigt, daß diese Prämissen nicht gleichzeitig alle wahr sein können. Die Behauptung, daß C war is jedem Modell, in dem die Prämissen alle wahr sind, ist dann ab automtisch erfüllt, da es ein solches Modell ja gar nicht gibt. S auch Anwendungen von RAA wie die in (181) aus semantischer einwandfrei. In dem im letzten Abschnitt entwickelten System wie die Ableitung von B aus A v B und ¬A vemuten läßt, auch unentbehrlich.

Wir fahren mit unserer Ableitung weiter.

(182)

n	h_1, ..., h_g	A v B	...
m	i_1, ..., i_k	¬A	....
p	p	¬B	An
p+1	p+1	A	An
P+2	p+1, h_1, ..., h_g	A & ¬A	p, p+1, &-I
p+3	p+1, h_1, ..., h_g	B	p, p+2, RAA
p+4	p+4	B	An

(182) enthält zwei Ableitungen der Formel B. Die ertse involvie Annahme der Formel A in Zeile p+1. Die zweite ist keine Ableitu eingentlichen Sinne. In dieser "Ableitung" spielt die Zeile p+4 gleichhzeitig die Rolle der (einzigen) Prämisse und des Schlußes "Ableitung" beinhaltet also nichts weiter als daß die Formel B "a selbst folgt" (Selbstverständlich ist eine solche "Ableitung" korr denn jede Formel "garantiert die Wahrheit ihrer selbst: Ist die wahr, so ist sie wahr!) Da wir in (182) eine Ableitung von B aus eine aus B haben, können wir durch Anwendung der Regel v-I B der Disjunktion A v B (susammen mit der in der ersten Ableitur

zusätzliche verwendeten Zeile ¬A) abgeleitet betrachten. (183) das Ergbnis dieser Anwendung von v-I:

(183)

n	h_1, ..., h_g	A v B	...
m	i_1, ..., i_k	¬A	....
p	p	¬B	An
p+1	p+1	A	An
P+2	p+1, i_1, ..., i_k	A & ¬A	p, p+1, &-I
p+3	p+1, i_1, ..., i_k	B	p, p+2, RAA
p+4	p+4	B	An
p+5	h_1, ..., h_g, i_1, ..., i_k	B	n,p+1,p+3, p+4, v-E

Damit haben wir die Möglichkeit B aus A v B und ¬A abzuleiten, nachgewiesen

Kehren wir jetzt zu unserer ursprünglichen Aufgabe, der Ableit Zeile q aus Zeile p in (180), zurück. Wir verfahren auch hier na Prinzip der Reductio, d. h. indem wir einen Widerspruch mit de erwünschten Schluß (also mit der Formel der Zeile q) herbeizuf versuchen. Unser erster Schritt ist deshalb, die Negation dieser anzunehmen. Jetzt machen wir von dem Umstand Gebrauch, da diese Formel zugleich das erste Disjunkt der in der Zeile p vorkommenden Disjunktion ist. Deshalb ist erlaubt, das zweite dieser Disjunktion, also die Formel C(a), abzuleiten. Der Übersichtlichkeit halber lassen wir die Schritte q+1 - q+4, die de p+1 - p+4 in (183) entsprechen, weg.

(184)

p	h_1,,,,h_g	$((B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2) \vee C(a)$	
	...		
q	q	$\neg ((B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2)$	An
.			
.			
q+5	q, h_1,,,,h_g	C(a)	....., v-E

Jetzt beobachten wir, daß der Parameter a in keiner von den F vorkommt, die in der zweiten Spalte der Zeile q+5 erwähnt sind. folgt daraus, daß, w<ie wir angenommen haben, a weder in den der Zeilen $h_1,,,,h_g$ vorkommt, von denen die Disjunktion der Zeil abhängt, noch auch in den Disjunkten B^1 und B^2 oder der Forme C(x)); also kommt a auch nicht in der (Formel der) Zeile q vor. ist es erlaubt, die Regel (∀-I) anzuwenden, was zu der Formel (∀x in Zeile q+6 führt. Über zwei Anwendungen der Regel v-I gelang dann zu der Formel $(B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2$.

(185)

p	$h_1,,,,h_g$	$((B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2) \vee C(a)$	
	...		
q	q	$\neg ((B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2)$	An
.			
.			
q+5	q, $h_1,,,,h_g$	C(a)	....., v-E
q+6	q, $h_1,,,,h_g$	$(\forall x)\ C(x)$	q+5, ∀-I
q+7	q, $h_1,,,,h_g$	$B^1 \vee (\forall x)\ C(x)$	q+6, v-I
q+8	q, $h_1,,,,h_g$	$(B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2$	q+7, v-I

Damit ist unser Problem aber noch nicht ganz gelöst, denn die Schlußformel hängt in Zeile q+8 immer noch von der Annahme i ab. Wir können uns dieser Annahme aber entledigen, indem wi Konjunktion der beiden Formeln der Zeilen q+8 und q bilden. D einen expliziten Widerspruch, der die Anwendung von RAA erm In dieser Anwendung können wir schließen, daß die Formel $(B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2$, deren Negation in der Zeile q angenommen aus den sonst für das Erreichen des Widerspruchs erforderliche - also aus $h_1,,,,h_g$ - folgt. Da diese Formel wiederum die Form de angestrebten Schlußes hat, ist unsere Ableitung vollständig:

(186)

p	h_1,.., hg	$((B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2) \vee C(a)$	
	...		
q	q	$\neg ((B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2)$	An
.			
.			
q+5	q, h_1,,,,hg	$C(a)$	....., v-E
q+6	q, h_1,,,,hg	$(\forall x)\ C(x)$	q+5, $\forall$-I
q+7	q, h_1,,,,hg	$B^1 \vee (\forall x)\ C(x)$	q+6, v-I
q+8	q, h_1,,,,hg	$(B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2$	q+7, v-I
q+9	q, h_1,.., hg	$(B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2)$ & $\neg ((B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2)$	q, q+8, &-I
q+10	h_1,.., hg	$(B^1 \vee (\forall x)\ C(x)) \vee B^2$	q, q+9, RAA

2.4 Quantoren- und Identitäts-Regeln

Zum Abschluß unseres Überblicks über die Natürliche Deduktion ergänzen wir die Liste (164) der Regeln für die Aussagenlogik m Liste für Quantoren- und Identitäts-Regeln:

(187)

$\exists$-Introduktion

n	h_1, ..., hg	$C(t)$	...
m	h_1, ..., hg	$(\exists x)\ C(x)$	n, $\exists$-I

∃-Eliminierung

n	$h_1, ..., h_g$	$(\exists x)\ C(x)$	...
m	m	$C(a)$	An
p	$i_1, ..., i_k$, m	B	.....
q	$i_1, ..., i_k, h_1, ..., h_g$	B	n, ∃-E

(Bedingung: a darf weder in $(\exists x)\ C(x)$ noch in den Formeln d
Zeilen $h_1, ..., h_g$ vorkommen.)

∀-Introduktion

n	$h_1, ..., h_g$	$C(a)$	...
m	$h_1, ..., h_g$	$(\forall x)\ C(x)$	n, ∀-I

(Bedingung: a darf weder in $(\forall x)\ C(x)$ noch in den Formeln d
Zeilen $h_1, ..., h_g$ vorkommen.)

∀-Eliminierung

n	$h_1, ..., h_g$	$(\forall x)\ C(x)$	...
m	$h_1, ..., h_g$	$C(t)$	n, ∀-E

=-Introduktion

n		$t = t$	n, =-I

=-Eliminierung

n	$h_1, ..., h_g$	$s = t$	...
m	$i_1, ..., i_k$	$C(s)$	....
p	$h_1, ..., h_g, i_1, ..., i_k$	$C(t)$	n,m, (=-E)

3. Axiomatische Beweisverfahren.

Ziel des letzten Abschnitts war: Ein "lineares" logisches Ableitun system zu entwickeln, das erlaubt, von den Prämissen eines Ar ausgehend mittels einer Kette von Inferenzschritten den erwü Schluß zu erreichen.

Frage: Inwiefern ist uns dies gelungen?

Antwort: Zum Teil schon, aber eben nur zum Teil.

Unser Erfolg war zuletzt deswegen beschränkt, weil es unter der unseres Systems nicht nur Inferenzregeln sondern auch eine A Deduktionsregeln gibt. Bei einem System, das Deduktionsregeln deren Prämissen nicht Zeilen sondern Ableitungen sind, kann v "direkten" Deduktionssystem im intendierten Sinne nicht eigent Rede sein. Daß die durch das System definierten Ableitungen li angeordnete Sequenzen von Zeilen sind, ist, wie wir schon beme haben, weitgehend nur eine Frage der Präsentation - der "Darstellungskosmetik", könnte man sagen.

Ist es möglich, die Deduktionsregeln ganz zu eliminieren? Die A zu dieser Frage lautet "Ja und Nein". In den Systemen, die der der Natürlichen Deduktionssysteme angerechnet werden - es gi eine beträchtliche Vielfalt - findet man neben Inferenzregeln i auch eine oder mehrere Deduktionsregeln. Zum Teil unteresche diese Systeme insbesondere dadurch, daß der Bestandteil an Deduktionsrgeln größer oder geringer ist. Aber bei keinem ist Bestandteil gleich Null.[8]

Es gibt nichtdestotrotz Ableitungssysteme, die ohne Deduktions auskommen. Ein solches System ist Gegenstand dieses Abschnitt Systeme dieser Art erfordern aber nicht nur eine weitere Revisi

---

8 Insbesondere gibt es Systeme, in denen es nur eine Deduktionsregel und zwar die Reductio-Regel RAA (in unterschhiedlichen, aber meist seh ähnlichen Varianten). Das Beweisverfahren, das wir im nächsten Absch unter die Lupe nehmen werden - das sog. Resolutionsverfahren, das für maschinelle Theorembeweisen von besonderer Bedeutung ist - ist ein sol System in etwas abgewandelter Form.

Beweisarchitektur; sie setzen sogar eine andere Konzeption des Beweisens überhaupt voraus.

Nach dieser Konzeption ist das zentrale Anliegen der logischen Deduktion das Ableiten von "logischen Theoremen", d.h. von For die logisch gültig - also: in jedem Modell wahr - sind. Das Ableit dem Schluß eines Arguments aus seinen Prämissen wird als ein besonderer Fall des logischen Theorembeweisens verstanden: Ableitungen von B aus $A_1, .., A_n$ werden mit Ableitungen des lo gültigen Satzes $(A_1 \& .. \& A_n) \rightarrow B$ identifiziert.[9]

Deduktionssysteme, in denen strikt gesprochen nur logische Th abgeleitet werden, gibt es schon seit dem Ende des letzten Jahrhunderts.[10] Sie sind unter dem Namen von "Axiomatische Systemen" bekannt, und zwar deshalb, weil sie vorwiegend aus "Axiomen" bestehen. Die "Axiome" eines solchen Systems sind bestimmte logisch gültige Formelschemata, aus denen dann mit gewisser Inferenzregeln weitere logisch gültige Formeln abgleite werden können. Natürlich muß es in einem solchen System neb Axiomen auch mindestens eine solche Regel geben, denn sonst w unmöglich, aus den gegebenen Axiomenschemata neue Schemata deduzieren. Diese Regeln sind aber immer Inferenzregeln - sie verwenden Formeln, keine Ableitungen als Prämissen; und übe kommen axiomatische Systeme im Allgemeinen mit nur weniger solchen Regeln aus. Die Regel, die in den meisten heutzutage b axiomatischen Systemen die zentrale Rolle spielt, ist Modus Pone es gibt axiomatische Systeme, die sogar mit dieser einen Regel auskommen. Oft wird aber zumindest noch eine weitere Regel f Verwaltung von Quantoren hinzugenommen. Dies gilt insbeson das System, das wir in diesem Abschnitt vorführen werden.

1.3.1 Aussagenlogik mit → und ¬.

Auch für die Darstellung axiomatischer Systeme empfiehlt es sic zuerst auf den Aussagenkalkül zu konzentrieren und ein System Ableitung aussagenlogischer Tautologien zu entwickeln. Dieses werden wir dann wieder zu einem System für die Prädikatenlog erweitern, in dem auch beliebige prädikatenlogische Tautologie

---

9 Eine solche Idenitifikation ist insofern gerechtfertigt, als $A_1, .., A_n \vDash$ B genau dann gültig ist, wenn $(A_1 \& .. \& A_n) \rightarrow$ B eine logisch gültige Formel ist.

10 Insbesondere waren die historisch bedeutsamen Deduktionssysteme Frege und von Russell und Whitehead Systeme von dieser Art.

bewiesen werden können. Diesmal wollen wir uns aber am Anfa stärker einschränken, indem wir den Teilformalismus der Auss betrachten, in dem von den Junktoren nur $\rightarrow$ und $\neg$ vertreten si haben im ersten Teil dieses Skripts beobachtet, daß mit Hilfe di beiden Junktoren die drei anderen (&, v, $\leftrightarrow$) definiert werden k

Die einzige Inferenzregel, die wir in unserem System für die Aussagenlogik mit $\rightarrow$ und $\neg$ verwenden, ist Modus Ponens. Man aber auch eine andere Regel wählen können, und dasselbe gilt i stärkerem Maße für die Wahl der Axiome.[11] Außer den hier ge drei Axiomen gibt es noch viele andere Optionen.

Von diesen drei Axiomen betreffen die ersten zwei ausschließlic Junktor $\rightarrow$; nur das dritte Axiom bringt auch die Negation $\neg$ ins

(189)

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A 2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Diese Axiome - und dies gilt nicht nur für A1 - A3, sondern auch weiteren, die in diesem Abschnitt noch diskutiert werden - sind Axiomenschemata zu verstehen: Jede Formel, die die Form eine Schemata hat, hat den Status eines Axioms und darf deshalb in Ableitung an beliebiger Stelle als neue Zeile eingetragen werden. kombinatorische Herausforderung solcher Systeme besteht auch allem darin, daß Ableitungen oft geschickt gewählteInstanziieru Schemata erfordern, und - und manchmal sind diese alles and offensichtlich. Ein erstes, noch vergleichsweise bescheidenes Be von der "Kombinatorik" solcher Ableitungen ist der folgende Bev Formel $p \rightarrow p$:

---

11 In der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts sind diese Optionen energ untersucht worden. Dies ist ein Kapitel der formalen logik, das inzwische einiges an Reiz und Bedeutung eingebüßt hat.

(190)

<u>Beweis</u>

1	$(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	A2 (mit p für A, $(p \rightarrow p)$ für B und p für C)
2	$p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$	A1 (mit p für A und $(p \rightarrow p)$ für B)
3.	$(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$	1,2, MP
4	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$	A1 (mit p für A und p für B)
5	$p \rightarrow p$	3,4, MP

Wie sich aus diesem Beweis erkennen läßt, ist die Grundstruktur Ableitungen in diesem System recht einfach:

(191) (Definition von Ableitungen im axiomatischen System für Aussagenlogik)

Eine Ableitung ist eine Reihe von Zeilen, in denen jede Zeile eintweder

(i) eine Instanz eines der Axiomenschemata A1 - A3
oder
(ii) aus zwei vorangehenden Zeilen mittels MP folgt.

<u>Bemerkung</u>: Ebenso wie die Axiome haben auch die Beweise axiomatischer Systeme einen schematischen Charakter. Beispiels ist die Wahl der atomaren Formel p im Beweis (190) unerheblic wir statt p irgendeine andere atomare oder komplexe Formel genommen, so ergäbe sich ein seiner Form nach ähnlicher und gültiger Beweis. Also haben wir hier es eigentlich mit einer Inst eines Beweisschemas - eines "Beweises" des gültigen Formelschen $\rightarrow$ A - zu tun: Alle Formeln dieser Form sind gültig, und sie kön abgeleitet werden, indem man in den Formeln von (190) das At durchgehend durch die betreffende Formel A ersetzt. Wir regi diese Beobachtung, indem wir das Schema A $\rightarrow$ A als erstes in ei von "Theoremen" unseres axiomatischen Ableitungssystems ein

Von jetzt an werden wir die Ableitungen selbst auch in schema
Form darstellen.

T. 1 $A \rightarrow A$

Es folgen jetzt noch einige solche Theoreme, welche ein gewisses
aussagenlogischen Gesetzmäßigkeiten verschaffen. Dabei ist die
befolgten Reihenfolge insofern wichtig, als schon bewiesene Sch
später bei der Ableitung anderer eingesetzt werden können. Ir
folgenden Ableitungen werden wir einige Beispiele für diese Mö
sehen.

T2. $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

<u>Beweis</u>:

1	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	A 2
2	$((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow$ $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$	A 1 (mit $B \rightarrow C$ für B und A2 für A)
3	$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$	1,2, MP
4	$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	A 1 (mit $B \rightarrow C$ für A und A für B)
5	$(3) \rightarrow (((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$ $\rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$	A 2 (mit $B \rightarrow C$ für A, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ für B und $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ für C
6	$((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$ $\rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$	3,5, MP
7	$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	4,6, MP

Im Beweis des nächsten Theorems T3 machen wir von dem jetzt bewiesenen Schema T2 Gebrauch, indem wir Instanzen des Sche Zeilen in den Beweis mit der Begründung eintragen, daß das Sch schon beweisen worden ist. Denn man kann ja den Beweis, der Zeile enthält, in einen Beweis im Sinne der Definition (191) verv indem man den schon bekannten Beweis der Instanz zwischen neuen Zeile und der ihr unmittelbar vorangehenden einfügt.

T3. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

<u>Beweis</u>.

1	$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	T2
2	$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ $\to (((B \to C) \to (A \to B)) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$	A 2 (mit $B \to C$ für A, $A \to B$ für B und $A \to C$ für C)
3	$((B \to C) \to (A \to B)) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	1,2, MP
4	$((A \to B) \to (3)) \to (((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B)))$ $\to ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))))$	A 2 (mit $A \to B$ für A, $(B \to C) \to (A \to B)$ für B und $(B \to C) \to (A \to C)$ für C)
5	$((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B)))$ $\to ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$	3,4, MP
6	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$	A 1 (mit $A \to B$ für A und $B \to C$ für B)
7	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	5,6, MP

Als drittes und letztes Beispiel einer Ableitung eines aussagenlo Schemas, das nur den Junktor $\to$ betrifft, der Beweis von

T4. $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

<u>Beweis</u>:

1	$(B \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C)))$	T3 (mit B für A, A→B für B und A→C für C)
2	$B \to (A \to B)$	A 1
3	$((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$	1,2, MP
4	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	A 2
5	$(4) \to ((3) \to ((A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))))$	T3 (mit A→(B→C) für A, (A→B) →(A→C) für B und B →(A→C) für C)
6	$(3) \to ((A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)))$	4,5, MP
7	$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$	3,6, MP

Weitere logisch gültige Schemata, die die Junktoren → und ¬ bet

T5. $(\neg A \to \neg (A \to A)) \to A$

(Von jetzt an verwenden wir " ⊥(A)" als Abkürzung für die Form $\neg (A \to A)$.)

T6. $\vdash \bot(A) \to A$
T7. $\vdash (\neg \bot(A) \to \bot(A)) \to \bot(A)$
T8. $\vdash ((\neg A \to B) \to \neg B) \to A$
T9. $\vdash (\neg\bot(A)) \to \neg\neg\bot(A))) \to \bot(A))$
T10. $\vdash \neg\neg \bot(A)) \to \bot(A))$
T11. $\vdash \neg \bot(A)$
T12. $\vdash B \to (\neg B \to \bot(A))$
T13. $\vdash \neg\neg A \to A$
T14. $\vdash \neg\neg \neg A \vdash \neg A$

T15. $\vdash A \to \neg\neg A$
T16. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$
T17. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
T18. $\Gamma \vdash A$ iff $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \bot$
T19 $\vdash (\neg A \to A) \to A$

Das System, das aus den Axiomen A1-A3 zusammen mit der Reg besteht, ist vollständig für den Aussagenkalkül mit den Junktore $\to$. (D. h. es können in diesem System alle logisch gültigen Forme Aussagenkalküls abgeleitet werden, in denen nur diese beiden Junktoren vorkommen. (Den Beweis dieses Vollständigkeitserge geben wir hier nicht.)

Es fehlen uns noch Axiome und Regeln, die die logischen Eigensc der sonstigen Junktoren sowie der Quantoren widerspiegeln. W weiteren Element unseres Axiomensystems betrifft, verfolgen w schon eingeschlagenen Weg dahingehend, daß wir uns zuerst m Axiome und Regeln für den All-Quantor befassen. Auf diese Wei erhalten wir ein System, das für den Teilformalismus des Prädikatenkalküls vollständig ist, der $\neg$, $\to$ und $\forall$ als seine einzig logischen Operatoren enthält. Da die anderen Operatoren alle n dieser drei definierbar sind, läßt sich dieses Axiomensystem dar einem für die gesamte Prädikaten logik erweitern, indem wir fü der anderen Operatoren ein Axiom hinzufügen, das innerhalb c Systems die Rolle einer Definition dieses Operators spielt.

Das System, das aus den Axiomen A1-A3 zusammen mit der Reg besteht, ist vollständig für den Aussagenkalkül mit den Junktore $\to$. (D. h. es können in diesem System alle logisch gültigen Forme Aussagenkalküls abgeleitet werden, in denen nur diese beiden Junktoren vorkommen. (Den Beweis dieses Vollständigkeitserge geben wir hier nicht.)

Bemerkung. Man kann sich viel Mühe und Elend beim Beweis vc Tautologien (und insbesondere von den Tautologien T2 - T19) indem man zuerst über das in diesem Abschnitt eingeführte axiomatische System A das folgende sogenannte "Deduktionsthe beweist, nach dem eine Formel $(A_1 \to (A_2 \to (\ldots (A_n \to B)..)$ genau in A ableitbar ist, wenn die Formel B "aus den Prämissen $A_1, \ldots,$ ableitbar ist". Ohne zusätzliche Erläuterung wird diese Behaup gewiß seltsam anmuten, denn am Anfang dieses Abschnittes wu Ableitbarkeit von ($A_1 \rightarrow$ ($A_2 \rightarrow$ (... ($A_n \rightarrow$ B)..) in einem axiomatisc System gerade als Definition für die Ableitbarkeit van B aus A_1, gemacht. Es gibt aber dieser Bemerkung zum Trotz auch eine f Definition von dem Begriff einer Ableitung von B aus den (nicht notwendigerweise logisch gültigen) Prämissen A_1, ..., A_n, der sicl besonderen Fall, in dem n = 0, zum schon definierten Begriff ei Tautologie B (aus einer leeren Prämissenmenge) reduziert. Dies allgemeineren Ableitungsbegriff müssen wir aber zuerst spezifi bevor wir das soeben erwähnte Theorem korrekt formulieren beweisen können.

Für die Definition von einer Ableitung in A von B aus A_1, ..., A_n i wichtig, dass wir genau zwischen Schemata und ihren Instanzi unterscheiden. Denn bei einer Ableitung von B aus A_1, ..., A_n ge es immer um die Formeln B, A_1, ..., A_n, und nicht um Schemata, ihnen instanziiert werden. In dieser Hinsicht unterscheiden sie den Axiomen, die, wie wir gesehen haben, als Schemata zu vers sind. In der Definition ist dieser Unterschied deutlich erkennb

Definition. Eine Ableitung in Avon B aus A_1, ..., A_n ist eine Sequ C_1 ,..., C_k von Formeln, so daß

(a) C_k = B; und

(b) jede Zeile C_j ist entweder
  (i) eine Instanz eines der Schemata A1-A3, oder
  (ii) eine der Prämissen A_1, ..., A_n, oder
  (iii) sie ergibt sich mit MP aus zwei der C_j in der Sequenz vorangehenden Zeilen C_h und C_i.

Theorem ("Deduktionstheorem" (für das auf SS. 128, 129 defin axiomatische Ableitungssystem A für die Aussagenlogik)

> Seien A_1, ..., A_n, B Formeln des Aussagenkalküls. Dann ist B i ableitbar aus A_1, ..., A_n genau dann wenn es eine Ableitung von der Formel ($A_1 \rightarrow$ ($A_2 \rightarrow$ (... ($A_n \rightarrow$ B)..).

Beweis Von rechts nach links ist der Beweis fast trivial. Sei C_1 ,.. eine Ableitung von ($A_1 \rightarrow$ ($A_2 \rightarrow$ (... ($A_n \rightarrow$ B)..). Wir erweitern die Ableitung zu einer von B aus A_1, ..., A_n, indem wir erst die Präm

A_1, ..., A_n als zusätzliche Zeilen C_{k+1}, ..., C_{k+n} anhängen und dann Modus Ponens anwenden, zuerst auf C_{k+1} (= A_1) und C_k (= ($A_1 \rightarrow$ ($A_2 \rightarrow$ (... ($A_n \rightarrow$ B)..)), dann auf das Ergebnis dieser Anwendung($A_2 \rightarrow$ (... ($A_n \rightarrow$ B)..)) und C_{k+2} (= A_2), ... und schließl $A_n \rightarrow$ B und C_{k+n} (= A_n). Die letzte Formel, die sich ergibt ist B.

Der Beweis von links nach rechts ist etwas komplizierter. Zuerst beobachten wir, daß es reicht, die folgende Behauptung (*) zu z

(*): Gibt es eine Ableitung von B aus A_1, ..., A_n, so gibt es auch e Ableitung von $A_n \rightarrow$ B aus A_1, ..., A_{n-1}. Es ist leicht einzusehen, c die allgemeine Behauptung des Theorems aus n-facher Wiederh von (*) ergibt.

Konzentrieren wir uns also auf (*). Zur Vereinfachung der Notat schreiben betrachten wir den Fall mit n+1 (statt n) Prämissen u schreiben A statt A_{n+1}.

Wir werden zeigen, daß eine Ableitung C_1 ,..., C_k von B aus A_1, ..., in eine Ableitung D_1,..., D_m von A $\rightarrow$ B aus A_1, ..., A_n umgesetzt w kann, die für jede Zeile C_i der ersten Ableitung eine entsprecher von der Form A $\rightarrow$ C_i enthält. Wir erstellen die neue Ableitung D D_m "induktiv", d. h. wir nehmen an, daß wir schon eine Ableitun D_r erzeugt haben, die Zeilen A $\rightarrow$ C_i enthält für i= 1, ..., h (mit h < zeigen, wie sich diese zu einer Ableitung D_1 ,..., D_m, D_{m+1},..., D_n erweitern läßt, in der ebenfalls die Formel A $\rightarrow$ C_{h+1} vorkommt. Bzl. C_{h+1} haben wir vier mögliche Fälle zu berücksichtigen: (i) C_h eine der Prämissen A_1, ..., A_n; (ii) C_{h+1} = A; (iii) C_{h+1} ist eine Instanziierung einer der Axiomenschemata A1-A3; (iv) es gibt Z und C_s, mit r < h+1 und s < h+1, aus denen C_{h+1} folgt mit Hilfe v

(i) C_{h+1} = A_j, mit j $\leq$ n. In diesem Fall erweitern wir D_1 ,..., D_m u Zeilen: A_j, $A_j \rightarrow$($A \rightarrow A_j$), A $\rightarrow$ A_j. Die erste von diesen neuen Zeilen eine der Prämissen A_1, ..., A_n, die zweite ist eine Instanz von A1 die dritte folgt aus den zwei unmittelbar vorangeheden mit Hilf MP. Ist also D_1 ,..., D_m eine Ableitung aus A_1, ..., A_n, ann gilt die für die Erweiterung.

(ii) $C_{h+1} = A$. In diesem Fall erwitern wir D_1 ,..., D_m um eine Ab von $A \to A$. (Siehe den oben gegebenen Beweis vn T1.) Wiederu bleibt die Erweiterung eine Ableitung aus A_1, ..., A_n.

(iii) C_{h+1} instanziiert ein Axiom. Dieser Fall ist wie (i): Wir füge Zeilen C_{h+1}, $C_{h+1} \to (A \to C_{h+1})$, $A \to C_{h+1}$ hinzu.

(iv) C_{h+1} folgt mit Hilfe von MP aus C_r und C_s. In diesem Fall r der beiden Zeilen C_r und C_s ein Konditional sein, das die andere Antezedens und die Formel C_{h+1} als Schluß enthält. Nehmen wi sei das Konditional, mit anderen Worten: $C_r = C_s \to C_{h+1}$. Nach Annahme enthält D_1 ,..., D_m Zeilen von der Form $A \to C_s$ und $A \to$ (h. also: von der Form $A \to (C_s \to C_{h+1})$). Wir fügen die folgenden hizu:
$(A \to (C_s \to C_{h+1})) \to ((A \to C_s) \to (A \to C_{h+1}))$, $(A \to C_s) \to (A \to C_{h+1})$, $A \to C_{h+1}$. Die erste von diesen ist eine Instanz von A2, während zweite und dritte sich aus vonrangehenden Zeilen mit Hilfe von ergeben. Also hat die Erweiterung wiederum die Eigenscaften e Ableitung aus A_1, ..., A_n.

q.e.d.

Als Beispiel dafür, wie viel leichter es wird, die Abeitbarkeit be Tautologien nachzuweisen, hier das Argument für T2.

Es geht darum, zu zeigen, daß Formeln von der Form $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ aus der leeren Prämissenmenge) ableitbar sind. Unter Bezugnahme auf das Deduktionstheorem wir dies nun wie folgt nachweisen: (i) Um zu zeigen, daß

(1) $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

reicht es, zu zeigen, daß $(A \to B) \to (A \to C)$ aus $B \to C$ ableitbar ist:

(2) $\{B \to C\} \vdash (A \to B) \to (A \to C)$

Um (2) nachzuweisen, genügt es, ebenfalls wegen des Deduktionstheorems, zu zeigen, daß

(3) $\{B \to C, A \to B\} \vdash A \to C$

und (3) ist gleichwertig mit

(4) $\{B \rightarrow C, A \rightarrow B, A\} \vdash C$

Daß C aus den Prämissen in (4) ableitbar ist, ist nun aber fast t
Wir leiten zuerst mit MP B ab aus $A \rightarrow B$ und A, und dann in eine
zweiten Anwendung von MP C aus B und $B \rightarrow C$.

3.2 Weitere Axiome und Regeln

Wir brauchen noch Axiome und Regeln, die die logischen Eigens der sonstigen Junktoren sowie die der Quantoren und der Iden widerspiegeln. Als nächsten Schritt in Richtung eines solchen umfassenden Systems betrachten wir zuerst eine eingeschränk Version der Prädikatenlogik, die neben den Junktoren ¬ und → All-Quantor ∀ enthält. Anschließend werden wir dann dieses Sy einem erweitern, das auch die noch fehlenden Junktoren und Quantor ∃ abdeckt, in dem außer ¬, → und ∀ auch &, v, ↔ und ∃ vorkommen. Für diese zweite Erweiterung werden wir nur noch Axiome brauchen, die die neuen Operatoren in terminis der sch vorhandenen "definieren".

Eine Axiomatisierung der Prädikatenlogik mit ¬, → und ∀ erhalte indem wir unserem System zwei weitere Axiome und eine neue Inferenzregel hinzufügen. Die Inferenzregel - die sog. Regel der U(niversal-)G(eneralisierung) - erlaubt die Inferenz einer Forme der Form $(\forall x)(A(x)$ aus gewissen Instanzen $A(\alpha)$. Wiedrum ist di intuitive Rechtfertigung, daß die schon durchgeführte Ableitung Instanz $A(\alpha)$ van keinen besonderen Eigenschaften von α Gebrau machen darf. (Damit wird sichergestellt, daß die Ableitung als l dafür betrachtet werden darf, daß $A(\alpha)$ gilt ungeachtet welches bezeichnet. Innerhalb der jetzigen Beweisarchitektur können w Prinzip formal entweder präzisieren, indem wir darauf bestehen eine Individuenkonstante (oder Parameter) oder daß sie eine f Variable ist. Meistens geht man davon aus, daß α eine freie Var und wir schließen uns dieser Praxis an. Dies bedeutet aber, daß System abzuleitenden Formeln nicht nur Sätze (also: Formeln ol freien Variablen) sind können, sondern, daß auch Ableitungen Formeln mit freien Variablen zu berücksichtigen sind.

Es bedeutet auch, daß von jetzt an die Axiomenschemata nicht n Satzschemata, sondern als Schemata zu betrachten sind, die auc Formeln mit freien Variablen instanziert werden dürfen. Damit Instanziierungen im Allgemeinen selbst keine Sätze, dondern Fo mit freien Variablen. Zum Beispiel gelten als Instanziierungen de Axioms A1 nicht nur Sätze wie $P(c) \rightarrow (Q(c) \rightarrow P(c))$, $P(c) \rightarrow (Q(d) \rightarrow$ und $(\forall x)P(x) \rightarrow ((\exists y)Q(y) \rightarrow (\forall x)P(x))$, sondern auch Formeln wie P $(Q(x) \rightarrow P(x))$, $P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow P(x))$, $P(x) \rightarrow ((\exists y)R(x,y) \rightarrow P(x))$, $(\exists y)R(x,y) \rightarrow ((\forall y)R(x,y) \rightarrow (\exists y)R(x,y))$, usw.

Die neuen Axiomenschemata sind A4 und A5:

A4. $(\forall v_i)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\forall v_i)B)$, angenommen, v_i hat keine freien Vorkommen in A

A5. $(\forall v_i)A \rightarrow A[t/v_i]$, angenommen, t entält keine Variablen, die bei Substitution von t für die freien Vorkommen von v_i in A durch Quantoren in $A[t/v_i]$ gebunden werden

Die Randbedingungen dieser Schemata sind essentiell: Formeln, diese Bedingungen verletzen, sind im Allgemeinen nicht logisch (Dabei ist eine Formel mit freien Variablenvorkommen genau da logisch gültig zu betrachten, wenn die Generalisierung dieser Fo logisch gültig ist - wobei die Generalisierung einer Formel A der den wir bekommen, wenn wir alle Variablen mit freien Vorkom A vorne durch All-Quantoren binden. Also ist die Generalisierun $P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x))$ der Satz $(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x)))$; die Generalisierung von $P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow P(x))$ entweder der Satz $(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow P(x)))$ oder der Satz $(\forall y)(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow P(x)))$ - die Reihenfolge der hinzugefügten Quantoren ist für die logische Bedeutung irrelevant; und die Generalisierungen von $P(x) \rightarrow ((\forall x)(R(x,y) \rightarrow P(x))$ sind $(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow ((\forall x)(R(x,y) \rightarrow P(x)))$ und $(\forall y)(\forall x)(P(x) \rightarrow ((\forall x)(R(x,y) \rightarrow P(x)))$, wobei zu beachten ist, daß d neue Quantor $(\forall x)$ in diesen beiden letzten Formeln die beiden Vorkommen von x als Argument von P, nicht aber das schon vo inneren Quantor $(\forall x)$ gebundene Vorkommen von x als Argumen binden).

Daß Verletzungen der Randbedingungen in der Tat zu ungültige Formeln führen können, sei mit zwei Beispielen belegt:

(i) Die Formel

(192) $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow (\forall x)P(x))$

ist eine Instanziierung von A4, verletzt aber die Randbedingung insofern in der Instanziierung der schematischen Konstituente A - also der Formel P(x) - die Variable x frei vorkommt. Daß diese nicht gültig ist, ist leicht einzusehen. Wäre sie gültig, so wäre au Satz $(\forall x)((\forall x)(P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)))$ gültig; oder, was au dasselbe hinausläuft, die Formel (192) würde selbst in jedem Mo unter jeder Belegung wahr sein. Nehmen wir nun an, die Inter von P in M, P_M, sei eine nicht-leere echte Teilmenge des Univers U_M und a sei eine Belegung, die der Variable x ein Element von I zuordnet. Das Antezedens $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(x))$ von (192) ist - dies unverkennbar - logisch gültig und somit wahr in M (unter a). I Antezedens P(x) vom Konsequens von (192) ist ebenfalls wahr in unter a, denn a(x) ist ja ein Element der Extension von P. Aber Konsequens $(\forall x)P(x)$ vom Konsequens von (192) ist falsch in M, w nicht das ganze Universum U_M umfaßt. Also ist (192) insgesamt in M unter a.

(ii) Die Formel

(193) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \,\&\, \neg P(y)) \rightarrow (\exists y)(P(y) \,\&\, \neg P(y))$

ist eine Instanz von A5, verletzt aber die Randbedingung von d Axiom, weil der Term t, der im Konsequens für die Variable x substituiert ist - t ist in diesem Beispiel die Variable y - durch d Quantor$(\exists y)$ der Formel $(\exists y)(P(y) \,\&\, \neg P(y))$ gebunden wird. Daß nicht logisch gültig ist, ist sehr leicht eizusehen. Sein Konsequen logisch falsch: Ein Objekt a, für das gilt, daß es sowohl P als auch erfüllt, kann es nicht geben; also muß die Formel $(\exists y)(P(y) \,\&\, \neg P$ jedem Modell falsch sein. Andererseits ist das Antezedens wahr jedem Modell, in dem es sowohl Elemente innerhalb als auch au der Extension von P gibt. In jedem solchen Modell ist (193) also

Die Rolle der neuen Regel UG läßt sich am Besten anhand von Be illustrieren. Die beiden folgenden Beispiele sind für Anwendung Regel typisch.

T20 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$

<u>Beweis</u>:

1	$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))$	A5, $P(x) \rightarrow Q(x)$ für A, x für v_i, x für t
2	$((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)))$	T4, $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ für A, $P(x)$ für B, $Q(x)$ für C
3	$P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x))$	1,2, MP
4	$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(x)$	A5, $P(x)$ für A, x für v_i, x für t
5	$((\forall x)P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow ((P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x))) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)))$	T3, $(\forall x)(P(x)$ für A, $P(x)$ für B, $((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)$ für C
6	$(P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x))) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)))$	4,5, MP
7	$(\forall x)P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x))$	3,6, MP
8	$(\forall x)((\forall x)P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)))$	7, UG
9	$(\forall x)((\forall x)P(x) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)(((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)))$	A4, $(\forall x)(P(x)$ fü A, $((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)$ für B, x für v_i
10	$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)(((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)))$	9,10, MP
11	$(\forall x)(((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x) Q(x))$	A4, $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ für A, $Q(x)$ für B
12	$((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)(((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (((\forall x)(((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x) Q(x))) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow ((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x) Q(x))$	T4, $(\forall x)(P(x)$ für A, $((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x)$ für B, $((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x) Q(x)$ für C

13	$(((\forall x)(((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to Q(x)) \to$	10, 12, MP
	$(((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x)\, Q(x))) \to$	
	$((\forall x)P(x) \to ((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x)Q(x)))$	
14	$((\forall x)P(x) \to ((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x)Q(x)))$	11, 13, MP
15	$((\forall x)(P(x) \to ((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x)Q(x))) \to$	T5, $(\forall x)(P(x)$ für A,
	$((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \to (\forall x)Q(x)))$	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ für B, $(\forall x)Q(x)$ für C
16	$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \to (\forall x)Q(x))$	14, 15, MP

T21. $(\forall x)(\forall y)R(x,y) \to (\forall y)(\forall x)R(x,y)$

<u>Beweis</u>:

1	$(\forall y)R(x,y) \to R(x,y)$	A 5
2	$(\forall x)((\forall y)R(x,y) \to R(x,y))$	1, UG
3	$(\forall x)((\forall y)R(x,y) \to R(x,y)) \to$	T20, $(\forall y)R(x,y)$ für
	$((\forall x)(\forall y)R(x,y) \to (\forall x)R(x,y))$	A, $R(x,y)$ für B,
4	$(\forall x)(\forall y)R(x,y) \to (\forall x)R(x,y)$	2,3, MP
5	$(\forall y)((\forall x)(\forall y)R(x,y) \to (\forall x)R(x,y))$	4, UG
6	$(\forall y)((\forall x)(\forall y)R(x,y) \to (\forall x)R(x,y))$	A4, $(\forall x)(\forall y)R(x,y)$ für
	$((\forall x)(\forall y)R(x,y) \to (\forall y)(\forall x)R(x,y))$	A, $(\forall x)R(x,y)$ für B
7	$(\forall x)(\forall y)R(x,y) \to (\forall y)(\forall x)R(x,y)$	5,6, MP

Wir schließen diesen Teil unserer Diskussion der axiomatischen mit einer schematischen Darstellung der beiden Inferenzregeln

(194) MP UG

$$\frac{A,\ A \to B}{B} \qquad\qquad \frac{A(v_i)}{(\forall v_i)A(v_i)}.$$

Es gilt zunächst, das bisher definierte System so zu erweitern, d die Ableitung logisch gültiger Formeln möglich wird, in denen d nicht berücksichtigten logischen Operatoren &, v, ↔ und ∃ vorko Wie schon angesagt, können wir zu diesem Zweck auf Axiome beschränken, die die genannten Operatoren mit Hilfe der schon berücksichtigten (→, ¬, ∀) "definieren". Diese Aussage ist übrige ganz korrekt. Definitionen haben im Allgemeinen die Form von Äquivalenzen. Das soll insbesondere auch für die Axiome gelten unserem System hinzufügen möchten. Zum Beispiel sich bietet f Konjunktion folgendes Axiom an:

(195) $(A \& B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

Damit man aus diesem Axiom aber die gewünschten Theoreme kann, müssen wir aber auch über bestimmte Prinzipien verfüge die Logik des Bikonditionaljunktors ↔ erfassen. Diese Prinzipien nun aber nicht in Form eines Schemas spezifiziert werden, das,

(196) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$

, ↔ mit Hilfe der schon berücksichtigten Junktoren definiert. D dieses Axiom ist aus demselben Grund wie (195) nicht verwend die zusätzliche Prinzipien, die den logischen Eigenschaften von ↔ entsprechen.

Der Ausweg aus dieser Impasse ist aber einfach genug. Wie wir ist $A \leftrightarrow B$ mit der Konjunktion von $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ äquivalent. D Äquivalenz ermöglicht es uns, eine "Definition" von ↔ zu "simuli ohne den Junktor ↔ selbst als Hauptjunktor zu verwenden. Die "Simulation" besteht aus drei Axiomen, die zusammen die Äqui erfassen, indem sie die Implikationen von links nach rechts unc rechts nach links, aus denen sich die Äquivalenz addiert, getre formulieren. Es sollte plausibel sein, daß die folgenden drei Axi dieses tun:

A6. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$

A7. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

A8. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Den Schemata für die drei noch verbleibenden Operatoren kön nun die Gestalt von "definierenden" Bikonditionalen geben.

A9. $(A \& B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

A10 $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

A11 $(\exists v_i)A \leftrightarrow \neg(\forall v_i)\neg A$

Diese Axiome erfordern wohl keinen zusätzlichen Kommentar.

Das System muß jetzt noch um Identitätsaxiome erweitert werde Axiome, die wir zu diesem Zweck gewählt haben, sind den Identitätsprinzipien eng verwandt, die uns aus der Diskussion Beweisverfahren schon gut bekannt sind:

A12. $v_i = v_i$

A13. $v_i = v_j \rightarrow (A \rightarrow A')$, wobei A' das Ergebnis eines Ersetzens von einem freien Vorkommen der Variable v_i in A durch v_j ist und das so entstehende Vorkommen von v_j in A' wiederum frei in A' ist.

4. Resolutionsverfahren

Das letzte der hier betrachteten Beweisverfahren ist das sogena Resolutionsverfahren. Dieses Verfahren hat enge Beziehungen z Tableaumethode, und einiges in dem jetzt folgenden Abschnitt daher an das erinnern, was im ersten Abschnitt dieses Teils sch ausführlich diskutiert wurde.

Gemeinsam haben Tableaumethode und Resolutionsverfahren c Prinzip, daß die Gültigkeit eines Arguments $A_1, \ldots, A_n \models B$ bewiese werden kann, indem man zeigt, daß die Menge $\{A_1, \ldots, A_n, B\}$ widersprüchlich ist. Die zwei Methoden unterscheiden sich von im Nachweis solcher Widersprüche. Bei der Tableaumethode wir Widerspruch durch das Scheitern einer exhaustiven Suche nach Gegenbeispiel belegt. Die Resolutionsmethode geht etwas anders transformiert die Konjunktion $A_1 \,\&\, \ldots \&\, A_n \,\&\, \neg B$ - diese Formel i genau dann ein logischer Widerspruch, wenn die Menge $\{A_1, \ldots, A$ einen Widerspruch enthält - so lange, bis ein Widerspruch direl der Form der transformierten Formel erkennbar ist.

Formeltransformationen bilden einen wesentlichen Teil der Resolutionsmethode. Damit die Konjunktion in der für die Resolutionmethode erforderliche Form gebracht wird bedarf es mehrerer Schritte. Diese Schritte führen zu Zwischenergebnissen sogenannten "Normalformen" - die von unabhängigem Interesse Wir widmen diesen Normalformen deswegen einen sparaten Teilabschnitt.

4.1 Normalformen.

Auch in diesem Abschnitt betrachten wir zuerst den Aussagenk

Für aussagenlogische Formeln definieren wir zwei Typen von Normalformen, die disjunktive Normalform und die konjunktive Normalform. Eine disjunktive Normalform (auch: Formel in dis Normalform) ist eine Disjunktion von Konjuktionen, deren Konj entweder atomare Formeln oder Negationen von atomaren Form eine konjunktive Normalform ist eine Konjunktion von Disjunk die aus atomaren Formeln und Negationen von atomaren Form bestehen.

Wir können diese Charakterisierungen etwas vereinfachen, inde den Begriff eines Literals einführen:

<u>Def</u>. Eine Formel A ist ein Literal gdw. A entweder eine atomare oder die Negation einer atomaren Formel ist.

<u>Def</u>. (i) Eine Formel A ist in disjunktiver Normalform gdw. A ei Disjunktion A_1 v ...v A_n ist, wobei jedes Disjunkt A_i eine Konjunktion $A_{i,1}$ & ...& A_{i,n_i} von Literalen ist.

(ii) Eine Formel A ist in konjunktiver Normalform gdw. A ei Konjunktion A_1 & ...& A_n ist, wobei jedes Konjunkt A_i ei Disjunktion $A_{i,1}$ v ...v A_{i,n_i} von Literalen ist.

Zwei Kommentare zu dieser letzten Definition. Erstens die Refer Disjunktionen und Konjunktionen von beliebiger Länge. Offiziell immer noch ausschließlich zweigleidrige Disjunktionen und Konjunktionen. Eine Formel wie z. B. A_1 & ...& A_n mit n > 2 ist st gesprochen eine ambige Abkürzung für beliebige Formeln, die zweistellige Konjunktionen enthalten und durch Klammerung au ...& A_n gewonnen werden können. Dies ist mit ein Grund warum unten definierten Begriffe "disjunktive/konjunktive Normalform strikt gesprochen nicht eindeutig sind, aber da alle möglichen Klammerungen von mehr-gliedrigen Konjunktionen und Disjun mit einander äquivalent sind, ist diese "Ambiguitäts"-Quelle unwesentlich und können wir sie ohne Gefahr ignorieren.

Zweitens muß etwas über die Grenzfälle gesagt werden, die sich wenn n (bzw. n_i) gleich 1 oder gleich 0 ist. Der Fall n = 1 (oder unproblematisch: Zum Beispiel besteht eine Konjunktion A_1 & ... mit n = 1 aus nur einem "Konjunkt" A_1. Eine solche Formel ist i konjunktiver Normalform, falls sie eine Disjunktion von Literale usw. Der Fall n = 0 (n_i = 0) ist etwas problematischer. Hier mü zwischen Konjunktionen und Disjunktionen unterscheiden. Wi betrachten zuerst die Konjunktion.

Wenn ein Glied A_i einer Konjunktion A_1 & . & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & logisch gültig ist, so ist diese Konjunktion logisch äquivalent mit A_i gekürzten Konjunktion A_1 & .. & A_{i-1} & A_{i+1} & . & A_n. Zum Be ist p & (q v ¬q) & r äquivalent mit p & r, und ist p & (q v ¬q) äquivalent mit p. Nur wenn A_i das einzige Konjunkt ist, ist eine Reduktion nicht möglich. In dem Fall ist die Konjunktion insges (äquivalent mit) A_i und ist sie also selbst logisch gültig. Wir kö dann aber immer noch durch eine ein für allemal gewählte, "k Tautologie ersetzen . z. B. durch die Formel p_0 v ¬ p_0, wobei p_0

Aussagenkonstante im Sinne einer völlig expliziten Definition de des Aussagenkalküls ist. Wir bezeichnen diese Formel fortan als Besteht eine Konjunktion aussschließlich aus logisch gültigen Konjunkten, so wird die gerade beschriebene Reduktion zuletzt zu der Formel T führen. Diese Formel betrachten wir deshalb al einzige) 0-stellige Konjunktion.

Der Fall einer 0-stelligen Disjunktion ist zu dem gerade besproc eder 0-stelligen Konjunktion dual. Ist das Disjunkt A_i der Disju A_1 v ... v A_{i-1} v A_i v A_{i+1} v ... v A_n ein logischer Widerspruch, so diese Disjunktion mit A_1 v ... v A_{i-1} v A_{i+1} v ... v A_n äquivalent. Insbesondere ist, wenn B ein Widerspruch ist, A v B äquivalent Ist dann überdies A selbst auch ein Widerspruch, so ist dieser n eliminierbar, aber A kann dann immer noch durch einen kano Widerspruch ersetzt werden. Wir wählen dazu die Formel p_0 & und bezeichnen sie als ⊥. Und wir definieren die 0-stellige Disju als ⊥.

Die Transformation einer beliebigen Formel der Aussagenlogik i disjunktive oder konjunktive Normalform erfolgt in einer Anzah Schritten. Wir beschreiben diesen Prozess in Einzelheiten für di konjunktive Normalform. Für disjunktive Normalformen ist er z identisch und in jeder Hinsicht sehr ähnlich. Die Unterschiede nachdem das Verfahren für die konjunktive Normalform besch ist, in wenigen Worten erläutert werden.

Zuerst eliminieren wir die Junktoren ↔ und →, die in keiner konjunktiven (oder disjunktiven) Normalform vorkommen. Dal machen wir von den logischen Äquivalenzen (198), (199) Gebra

(198) $A \leftrightarrow B \equiv^{12} (A \rightarrow B) \ \& \ (B \rightarrow A)$

(199) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Mit Hilfe von (198) können wir eine beliebige aussagenlogische A in in eine äquivalente Formel A' transformieren, in der ↔ nich vorkommt. (Dazu ersetzen wir Instanzen der linken Seite von (durch die entsprechenden Instanzen der rechten Seite.) Nachd

---

12 Wir verwenden das Symbol ≡ als Bezeichnung der Tatsache, daß die Forme zu ihrer linken die Formel zu ihrer rechten Seite impliziert und daß die zur Rechten die Formel zur Linken ebenfalls impliziert.

Vorkommen von $\leftrightarrow$ auf diese Weise eliminiert worden sind, läßt s
mit Hilfe von (199) auf ähnliche Weise in eine Formel A'' verwa
der auch $\rightarrow$ nicht mehr vorkommt.

Beispiel; Sei A die Formel

(200) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

Zuerst eliminieren wir das Vorkommen von $\leftrightarrow$. Dies führt zu

(201) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow p))$

Eliminierung der "inneren" Vorkommen von $\rightarrow$ führt von (201)
Formel

(202) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg((\neg p \vee q) \,\&\, (\neg q \vee p))$

und Eliminierung des noch verbleibenden Vorkommens zu

(203) $\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg((\neg p \vee q) \,\&\, (\neg q \vee p))$[13]

Der nächste Schritt besteht darin, daß wir die Negationszeichen
Formel ganz "nach innen schieben" und gleichzeitig doppelte N
(d.h. Paare "¬¬" von unmittelbar aufeinander folgenden
Negationszeichen) streichen[14]. Das Ergebnis ist eine Formel, in
Negationszeichen nur noch unmittelbar vor atomaren Formeln
Die Äquivalenzen, die diese Transformation begründen, sind:

(204) $\neg\neg A \equiv A$
(205) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, \neg B$

---

[13] Die Reihenfolge, in der diese Ersetzungen surchgeführt werden ist ni
weserntlich. Wir hätten genausogut zuerst das Vorkommen von $\rightarrow$ mit weitem
Skopus und dann erst die inneren Vorkommen ersetzen können. Dies hä
zu

(202') $\neg(p \rightarrow \neg q) \vee \neg((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow p))$

und dann zu (203) geführt.

[14] Dies ist erlaubt, da eine doppelt negierte Formel immer mit der Forn
logisch äquivalent ist; übrigens kommen solche Paare in (203) nicht vor,
entfällt dieser Schritt hier.

(206) $\neg(A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Bei der Anwendung dieser Äquivalenzen arbeiten wir von inner außen: Zuerst werden die Negationszeichen nach innen getriebe deren Skopus entweder übrhaupt keine Negationszeichen vork oder sonst nur solche, die schon unmittelbar vor einer atomare stehen. Das Ergebnis dieser Prozedur ist, daß die nach innen b Negationszeichen jetzt direkt vor einem Literal stehen, also ent direkt vor einer atomaren Formel oder vor der Negation einer Formel. Im letzteren Fall haben wir ein Paar ¬¬, das unter Anw von (204) gestrichen werden kann. Die zwei Operationen - nacl treiben der Negationszeichen mit Hilfe von (205) und (206) un Streichen von ¬¬ - führen schrittweise zu

(207) $(\neg\neg p \,\&\, \neg\neg q) \vee (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$,

(208) $(\neg\neg p \,\&\, \neg\neg q) \vee ((\neg\neg p \,\&\, \neg q) \vee (\neg\neg q \,\&\, \neg p))$, und

(209) $(p \,\&\, q) \vee ((p \,\&\, \neg q) \vee (q \,\&\, \neg p))$

In (209) gibt es nun weiter keine Negationszichen mehr, die nic unmittelbar vor einer atomaren Formel stehen, und somit ist d negationsbezogene Phase des Transformationsprozesses abgescl

Es bleibt jetzt nur noch die Aufgabe, die Konjunktionszeichen, di im Skopus einer oder mehreren Disjunktionsvorkommen befind oben zu ziehen". Dazu macht man von folgenden Äquivalenzen Gebrauch.

(210) (i) $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$

(ii) $(A \,\&\, B) \vee C \equiv (A \vee C) \,\&\, (B \vee C)$

Durch wiederholte Anwendung dieser beiden Schemata (sowie Neuklammerung von Disjunktionen mit mehr als zwei Gliedern[1 sich (209) in (221) transformieren:

---

15 Im Allgemeinen sind solche Neuklammerungen auch bei mehrstelli Konjunktionen nötig. Zufälligerweise gibt es solche Konjunktionen im vorliegenden Beispiel aber nicht.

Strikt gesprochen beruhen solche "Neuklammerungen natürlich auch a Äquivalenzen, und zwar auf den folgenden, die uns aus dem ersten Teil d Skripts schon mehr als genügend bekannt sind:

(211) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

(212) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

(216) $(p \vee ((p \,\&\, \neg q) \vee (q \,\&\, \neg p))) \;\&\; (q \vee ((p \,\&\, \neg q) \vee (q \,\&\, \neg p)))$
(217) $((p \vee (p \,\&\, \neg q)) \vee (q \,\&\, \neg p))) \;\&\; ((q \vee (p \,\&\, \neg q)) \vee (q \,\&\, \neg p$
(218) $((p \vee (p \,\&\, \neg q)) \vee (q \,\&\, \neg p))) \;\&\; ((q \vee (p \,\&\, \neg q)) \vee (q \,\&\, \neg p$
(219) $(((p \vee p) \,\&\, (p \vee \neg q)) \vee (q \,\&\, \neg p))) \;\&$
$(((q \vee p) \,\&\, (q \vee \neg q)) \vee (q \,\&\, \neg p)))$
(220) $(((p \vee p) \,\&\, (p \vee \neg q)) \vee q) \,\&\, ((p \vee p) \,\&\, (p \vee \neg q)) \vee \neg p)))$
$(((q \vee p) \,\&\, (q \vee \neg q)) \vee q) \,\&\, ((q \vee p) \,\&\, (q \vee \neg q)) \vee \neg p)))$

(221) $(p \vee p \vee q) \,\&\, (p \vee \neg q \vee q) \,\&\, (p \vee p \vee \neg p) \,\&\, (p \vee \neg q \vee \neg p$
$(q \vee p \vee q) \,\&\, (q \vee \neg q \vee q) \,\&\, ((q \vee p \vee \neg p) \,\&\, (q \vee \neg q \vee \neg$

Nach der Definition auf S, 145 ist (221) jetzt in Konjunktiver Normalform. Die Formel läßt sich noch vereinfachen, indem Wiederholungen eines und desselben Disjunkts oder Konjunkts zwei- oder mehr-gliedrigen Disjunktion oder Konjunktion gestri werden.[16] Diese Prozedur verwandelt (221) in (222):

(224) $(p \vee q) \,\&\, (p \vee \neg q \vee q) \,\&\, (p \vee \neg p) \,\&\, (p \vee \neg q \vee \neg p) \;\&$
$(q \vee p) \,\&\, (q \vee \neg q) \,\&\, ((q \vee p \vee \neg p) \,\&\, (q \vee \neg q \vee \neg p)$

---

(213) $A \,\&\, (B \,\&\, C) \equiv (A \,\&\, B) \,\&\, C$
(212) $(A \,\&\, B) \,\&\, C \equiv A \,\&\, (B \,\&\, C)$

Wir werden hier von diesen Äquivalenzen, auf der die informelle Schreil von mehrgliedrigen Konjunktionen und Disjunktionen ja beruht, stillschweigenden Gebrauch machen. Ähnlich werden wir auch mit den Prinzipien verfahren, die besagen, daß Disjunkte oder Konjunkte ausget werden können, ohne daß sich die Wahrheitsbedingungen der Disjunktic Konjunktion dadurch ändern:

(214) $A \vee B \equiv B \vee A$
(215) $A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A$

[16] Dabei beziehen wir uns auf die offensichtlichen Äquivalenzen

(222) $A \vee A \equiv A$ und
(223) $A \,\&\, A \equiv A$

und nach Austausch von p und q im fünften Konjunkt und zus Streichen des jetzt mit dem ersten Konjunkt identischen fünfte Konjunkts

(225) $(p \vee q) \,\&\, (p \vee \neg q \vee q) \,\&\, (p \vee \neg p) \,\&\, (p \vee \neg q \vee \neg p) \,\&$
$(q \vee \neg q) \,\&\, ((q \vee p \vee \neg p) \,\&\, (q \vee \neg q \vee \neg p)$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn wir das schon erv Prinzip anwenden, nach dem eine Konjunktion, die ein logisch g Konjunkt enthält, äquivalent ist mit der Konjunktion, die entste man dieses Konjunkt streicht; gleichzeitig machen wir von dem Gebrauch, daß eine Disjunktion, in der eine Formel A und die N $\neg$A beide als Disjunkte vorkommen, logisch gültig ist. Das Ergebr

(226) $p \vee q$

Die Transformation einer Formel in eine disjunktive Normalforn verläuft nach ähnlichen Prinzipien. Das Verfahren unterscheid von dem oben beschriebenen erst an dem Punkt, nachdem das Innen-Bewegen der Negationszeichen und Streichen von Paaren stattgefunden hat, also in unserem Beispiel an dem Punkt, der erreicht wurde.

Nun ist (209) schon in disjunktiver Normalform; es gibt also in Fall für das disjunktive Normalformverfahren nichts weiter zu Daher betrachten wir in diesem Fall ein etwas komplizierteres E und zwar die Formel

(227) $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

Eliminierung von $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ und Behandlung der Negation führt i diesem Fall zu der Formel

(228) $((p \,\&\, q) \vee ((p \,\&\, \neg q) \vee (q \,\&\, \neg p))) \,\&$
$(((\neg p \vee q) \,\&\, (\neg q \vee p)) \vee (\neg p \vee \neg q))$

Die jetzt folgenden Schritte sind durch Anwendung von (210.ii) gerechtfertigt.

(229) $((p \,\&\, q) \vee ((p \,\&\, \neg q) \vee (q \,\&\, \neg p))) \,\&$
$(((\neg p \vee q) \,\&\, (\neg p \vee \neg q)) \vee ((\neg q \vee p) \,\&\, (\neg p \vee \neg q)))$

(230) ((p &q) & (((¬p v q) & (¬p v ¬q)) v ((¬q v p) & (¬p v ¬
v (((p & ¬q) v (q & ¬p))) &
(((¬p v q) & (¬p v ¬q)) v ((¬q v p) & (¬p v ¬q))))

(231) (((p &q) & (((¬p v q) & (¬p v ¬q)) v
((p &q) & ((¬q v p) & (¬p v ¬q)))) v
(((p & ¬q) &
(((¬p v q) & (¬p v ¬q)) v ((¬q v p) & (¬p v ¬q)))) v
((q & ¬p))) &
(((¬p v q) & (¬p v ¬q)) v ((¬q v p) & (¬p v ¬q)))))

(232) (((p &q) & ((¬p v q) & (¬p v ¬q))) v
((p &q) & ((¬q v p) & (¬p v ¬q)))) v
((((p & ¬q) & ((¬p v q) & (¬p v ¬q))) v
(((p & ¬q) & ((¬q v p) & (¬p v ¬q)))) v
(((q & ¬p) & ((¬p v q) & (¬p v ¬q))) v
((q & ¬p) & ((¬q v p) & (¬p v ¬q)))))

(233) (((p &q) & ((¬p & (¬p v ¬q)) v (q & (¬p v ¬q)))) v
((p &q) & ((¬q & (¬p v ¬q)) v (p & (¬p v ¬q))))) v
((((p & ¬q) & ((¬p & (¬p v ¬q)) v (q & (¬p v ¬q)))) v
(((p & ¬q) & ((¬q & (¬p v ¬q)) v (p & (¬p v ¬q))))) v
(((q & ¬p) & ((¬p & (¬p v ¬q)) v (q & (¬p v ¬q)))) v
((q & ¬p) & ((¬q & (¬p v ¬q)) v (p & (¬p v ¬q))))))

(234) (((p &q) & (((¬p & ¬p) v (¬p & ¬q))) v ((q & ¬p) v (q &
v ((p &q) & (((¬q & ¬p) v (¬q & ¬q)) v
((p & ¬p) v (p & ¬q)))))) v
((((p & ¬q) & (((¬p & ¬p) v (¬p & ¬q)) v
((q & ¬p) v (q & ¬q)))) v
(((p & ¬q) & (((¬q & ¬p) v (¬q & ¬q)) v
((p & ¬p) v (p & ¬q))))) v
(((q & ¬p) & (((¬p & ¬p) v (¬p & ¬q)) v
((q & ¬p) v (q & ¬q)))) v
((q & ¬p) & (((¬q & ¬p) v (¬q & ¬q)) v
((p & ¬p) v (p & ¬q))))))

(235)

$$
\begin{array}{l}
(((p \,\&\, q) \,\&\, ((\neg p \,\&\, \neg p) \vee (\neg p \,\&\, \neg q)))) \vee \\
((p \,\&\, q) \,\&\, ((q \,\&\, \neg p) \vee (q \,\&\, \neg q)))) \vee \\
((p \,\&\, q) \,\&\, ((\neg q \,\&\, \neg p) \vee (\neg q \,\&\, \neg q))) \vee \\
((p \,\&\, q) \,\&((p \,\&\, \neg p) \vee (p \,\&\, \neg q)))))) \vee \\
(((((p \,\&\, \neg q) \,\&\, ((\neg p \,\&\, \neg p) \vee (\neg p \,\&\, \neg q))) \vee \\
((p \,\&\, \neg q) \,\&\, ((q \,\&\, \neg p) \vee (q \,\&\, \neg q)))) \vee \\
(((p \,\&\, \neg q) \,\&\, ((\neg q \,\&\, \neg p) \vee (\neg q \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, \neg q) \,\&\, ((p \,\&\, \neg p) \vee (p \,\&\, \neg q))))) \vee \\
((((q \,\&\, \neg p) \,\&\, ((\neg p \,\&\, \neg p) \vee (\neg p \,\&\, \neg q))) \vee \\
((q \,\&\, \neg p) \,\&\, ((q \,\&\, \neg p) \vee (q \,\&\, \neg q)))) \vee \\
(((q \,\&\, \neg p) \,\&\, ((\neg q \,\&\, \neg p) \vee (\neg q \,\&\, \neg q))) \vee \\
((q \,\&\, \neg p) \,\&\, ((p \,\&\, \neg p) \vee (p \,\&\, \neg q))))))
\end{array}
$$

(236)

$$
\begin{array}{l}
((p \,\&\, q) \,\&\, (\neg p \,\&\, \neg p)) \vee ((p \,\&\, q) \,\&\, (\neg p \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, q) \,\&\, (q \,\&\, \neg p)) \vee ((p \,\&\, q) \,\&\, (q \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, q) \,\&\, (\neg q \,\&\, \neg p)) \vee ((p \,\&\, q) \,\&\, (\neg q \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, q) \,\&\, (p \,\&\, \neg p)) \vee ((p \,\&\, q) \,\&\, (p \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (\neg p \,\&\, \neg p)) \vee ((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (\neg p \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (q \,\&\, \neg p) \vee ((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (q \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (\neg q \,\&\, \neg p)) \vee ((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (\neg q \,\&\, \neg q)) \vee \\
((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (p \,\&\, \neg p)) \vee ((p \,\&\, \neg q) \,\&\, (p \,\&\, \neg q)) \vee \\
((q \,\&\, \neg p) \,\&\, (\neg p \,\&\, \neg p)) \vee ((q \,\&\, \neg p) \,\&\, (\neg p \,\&\, \neg q)) \vee \\
((q \,\&\, \neg p) \,\&\, (q \,\&\, \neg p)) \vee ((q \,\&\, \neg p) \,\&\, (q \,\&\, \neg q)) \vee \\
((q \,\&\, \neg p) \,\&\, (\neg q \,\&\, \neg p)) \vee ((q \,\&\, \neg p) \,\&\, (\neg q \,\&\, \neg q)) \vee \\
((q \,\&\, \neg p) \,\&\, ((p \,\&\, \neg p)) \vee ((q \,\&\, \neg p) \,\&\, (p \,\&\, \neg q))
\end{array}
$$

Wir haben die unziemliche Formel (236) erzeugt, indem wir systematisch der oben (für die konjunkive Normalform) besch Prozedur gefolgt sind. (236) ist massiv redundant, die wir wie durch Anwendung der auf S. 149 erwähnten Prinzipien elimini können. Die so entstehende Vereinfachung ist (237)

(237) $\quad (p \,\&\, \neg q) \vee (q \,\&\, \neg p)$

Dieses recht sclichte Endergebnis provoziert die Frage, ob man s nicht unbeträchtlichen Aufwand, den es uns gekostet hat, (236) berechnen, nicht wengistens zum Teil hätte ersparen können. I Antwort ist bejahend: Schon in (234) hätten wir mit Hilfe der b

Übergang von (236) nach (237) verwendeten Beispiele beträcht Vereinfachungen erzielen können, so daß zumindest die letzten Transformationen viel einfacher gewesen wären. Es gibt zudem eine große Anzahl von weiteren Heuristiken, die es erlauben, Normalformen effizienter zu berechnen, und jedem, der sich mi Transformationen auseandersetzt, drängen sich bessere Strateg einiger Zeit geradezu auf.

4.1.2 Pränex-Normalformen

Pränex-Normalformen sind Formeln der Prädikatenlogik, in den Quantoren einer einzigen quantorenfreien Formel vorangehen. Beispiel haben die in diesem Teil schon mehrfach diskutierten (238) und (239)

(238) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \ \& \ R(x,y)))$ und

(239) $(\exists y)(Q(y) \ \& \ ((\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$

die Pränex-Normalformen (240) und (241):

(240) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \rightarrow (Q(y) \ \& \ R(x,y)))$ und

(241) $(\exists y)(\forall x)(Q(y) \ \& \ ((P(x) \rightarrow R(x,y)))$

Es läßt sich unschwer verifizieren, daß (240) logisch äquivalent (238) und (241) mit (239).

Unter den Pränex-Normalformen unterscheiden wir insbesonde konjunktive Pränex-Normalform und die disjunktive Pränex-Normalform. Eine konjunktive Pränex-Normalform ist eine Forn Pränexform, deren quantorenfreier Teil in konjunktiver Normal Sinne von der Definition auf S. 149) ist; analog ist eine disjunkti Pränex-Normalform eine Formel in Pränexform, deren quantor Teil die disjunktive Normalform besitzt. (240) und (241) sind konjunktive noch disjunktive Pränex-Normalformen, können ab Hilfe des im vorigen Abshnitt beschriebenen Verfahrens leicht i solche Form gebracht werden, indem man dieses auf den quantorenfreien Teil anwendet und diesen dann durch das Erg Prozedur in (240) bzw. (241) ersetzt. Zum Beispiel ist (242) ein konjunktive Pränex-Normalform für (238) und (243) eine disju Pränex-Normalform für (239).

(242) $(\forall x)(\exists y)((\neg P(x) \vee (Q(y)) \,\&\, (\neg P(x) \vee R(x,y)))$

(243) $(\exists y)(\forall x)((Q(y) \,\&\, \neg P(x)) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y)))$

Die Konstruktion einer Pränex-Normalform ergibt sich nach dies Überlegungen durch eine zweistufige Prozedur, in der (i) mittels Verfahrens, das die Quantoren alle nach vorne (und damit nach verschiebt, eine äquivalente Pränexformel geschaffen wird und (dies erwünscht ist, der quantorenfreie Teil mit Hilfe der Verfah letzten Abschnitts in eine konjunktive oder disjuniktive Norma gebracht wird. Da wir hier aber letztendlich nur an konjunktiv disjunktiven Pränex-Normalformen interessiert sind, bietet sich etwas andere Reihenfolge der Konstruktionsschritte an, die sow leichter formulierbar als auch leichter ausführbar herausstellt. diesem alternativen Verfahren eliminieren wir zuerst, unter Berücksichtigung derselben Äquivalenzen , die wir auch im vori Abschnitt verwendet haben, $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$, und schieben anschließen Negationsvorkommen nach innen. Erst nachdem wir so eine For geschaffen haben, in der nur die Junktoren v, & und $\neg$ vorkomm letzterer nur unmittelbar vor atomaren Teilformeln), wird das Verfahren eingesetzt, das die Quantoren nach vorne holt.

Die Anwendung der Äquivalenzen (198) und (199) verläuft in jetzigen Zusammenhang genauso wie bei Formeln des Aussagenl Zum Beispiel wird das Vorkommen von $\rightarrow$ in (238) wie folgt elim Wir betrachten die Teilformel $P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y))$. Diese is (199) mit der Formel $\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y))$ logisch äquivale Folglich entsteht bei Ersatz der ersten durch die zweite Formel i mit

(244) $(\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$

eine zu (238) logisch äquivalente Formel.[17]

[17] Die Überlegungen zur Erhaltung logischer Äquivalenz bei solchen Substitutionen ist alledings etwas komplizierter als dies für aussagenlogi Formeln der Fall ist. Die Formeln, die jetzt in den Anwendungen von (198 (199) eine Rolle spielen, sind im Allgemeinen keine Sätze sondern Formel freien Varialben. So enthalten z.B. die Formeln $P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y))$ und $\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y))$, die in der soeben vorgeführten Anwendung involviert waren, x als freie Variable. Daß die Substitution einer solchen durch eine mit ihr "äquivalenten" die Formel, in der die Substitution st auch hier in eine logisch äquivalente Formel überführt, hat mit dem hir relevanten Begriff der logischen Äquivalenz zwischen Formeln mit freien

Für das Nach-Innen-Schieben von Negationszeichen brauchen wi Allgemeinen außer den im letzten Abschnitt zu diesem Zweck eingeführten Äquivalenzen noch zwei weitere, die es uns erlaub Negationszeichen über einen Quantor zu schieben. Wie schon r beobachtet, muß dabei der Quantor durch sein "Dual" ersetzt we durch $\exists$, und $\exists$ durch $\forall$. Die nächsten zwei Äquivalenzen machen nochmal explizit:

(245) $\neg(\forall x)A(x) \equiv (\exists x)\neg A(x)$
(246) $\neg(\exists x)A(x) \equiv (\forall x)\neg A(x)$

Für die Transformation von (238) und (239) sind diese Prinzipi erforderlich. Ein Beispiel, indem sie eine Rolle spielt, ist die Neg der Formel (239):

(247) $\neg(\exists y)(Q(y)\ \&\ ((\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$

Zuerst eliminieren wir das Vorkommen von $\rightarrow$. Dies ergibt

(248) $\neg(\exists y)(Q(y)\ \&\ ((\forall x)(\neg P(x) \vee R(x,y)))$.

Anwendung von (246) auf (248) führt zu

(249) $(\forall y)\neg(Q(y)\ \&\ (\forall x)(\neg P(x) \vee R(x,y)))$,

und eine darauffolgende Anwendung von (206) zu

(250) $(\forall y)(\neg Q(y) \vee \neg (\forall x)(\neg P(x) \vee R(x,y)))$.

Variablen zu tun. Wir nennen zwei solche Formeln logisch äquivalent, w beliebige Modelle M und Belegungen a in M die beiden Formeln immer d Wahrheitswert erhalten; also, wenn die erste Formel in M unter a genau wahr ist, wenn das auch für die zweite Formel der Fall ist.) Es ist nicht s verifizieren, daß die Auswechslung zweier solcher Formeln die prädikatenlogische Formel, in der die Substitution durhcgeführt wird, in logisch äquivalente Formel transformiert. Auch läßt sich leicht verifizie die aussagenlogischen Äquivalenzen des letzten Abschnitts alle Äquivalen dem soeben definierten Sinn sind, wenn man sie durch Formeln mit frei Variablen instanziiert. Insbesondere stehen zwei Formeln, die sich durc Instanziierung von (199) lnks und rechts von $\equiv$ ergeben, immer in dieser Äquivalenzbeziehung zueinander. Somit ist denn auch insbesondere das Substitutionsresultat (244) logisch äquivalent mit der Ausgangsformel (2

Wenden wir auf (249) das Prinzip (245) an, so bekommen wir

(251) $(\forall y)(\neg Q(y) \vee (\exists x)\neg(\neg P(x) \vee R(x,y)))$,

wonach eine Anwendung von (205) und Streichen des so entst
Negationszeichenpaares die Formel

(252) $(\forall y)(\neg Q(y) \vee (\exists x)(P(x) \vee \neg R(x,y)))$,

ergeben, in der die Negationszeichen nur noch unmittelbar vor
Formeln stehen.

Wir kommen jetzt zu dem eigentlich neuen Teil der in diesem A
beschriebenen Prozedur - dem Nach-Vorne-Ziehen der Quantore
zuletzt zu einer Formel führt, in der sie ein einziges Quantoren
bilden. Für die Formeln (244) und (252) ist diese Prozedur
verhältnismäßig unproblematisch. Betrachten wir beispielsweis
Der Quantor $(\forall y)$ befindet sich schon an der gewünschten Stelle.
können den Quantor $(\exists x)$ ebenfalls an ene für eine Pränexforme
geeignete Stelle bewegen, indem wir ihn unmittelbar hinter der
$(\forall y)$ plazieren. Daß dadurch Formel entsteht, die mit (252) logi
äquivalent ist, folgt aus dem folgenden Prinzip:

(253) $B \,\&\, (\exists v_i)A(v_i) \equiv (\exists v_i)(B \,\&\, A(v_i))$ <u>Bedingung</u>: v_i hat keine freien Vorkommen in B

Daß die zwei Formeln links und rechts von $\equiv$ in (253) logisch äq
sind, wenn die Randbedingung erfüllt ist - [[wiederum geht es u
Äquivalenz im Sinn von Fußnote [6] auf S. [19]]?] - kann leicht g
werden.[18] Ersetzung der linken durch die rechte Seite der rele

---

[18] Das Argument läuft etwa so. Nehmen wir zuerst an, daß $B \,\&\, (\exists v_i)A(v_i)$ in M unter der Belegung a wahr ist. Dann ist insbesondere auch $(\exists v_i)A(v_i)$ in M unter a wahr. Dann muß es im Universum U_M von M ein Objekt b geben, das (zu
mit den durch a bereitgestellten Belegungen der anderen Variablen) A(v
erfüllt. Sei a' die Belegung, die das Objekt b und den anderen Variablen
Werte $a(v_j)$ zuordnet. Weil v_i nicht frei in B vorkommt, hat B in M unter a
denselben Wahrheitswert wie unter a. Also sind B und $A(v_i)$ beide wahr i
unter a'. Somit ist $B \,\&\, A(v_i)$ wahr in M unter a' und es folgt, daß $(\exists v_i)(B \,\&\, A(v_i))$ M unter a wahr ist.

Ist umgekehrt $(\exists v_i)(B \,\&\, A(v_i))$ M unter a wahr, dann gibt es ein Objekt b in U
so daß $B \,\&\, A(v_i)$ in M unter a' wahr ist, wo a' sowie oben definiert ist. Also

Instanziierung von (253) in (252) führt also zu der mit (252) äquivalenten Formel:

(254) $(\forall y)(\exists x)(\neg Q(y) \vee P(x) \vee \neg R(x,y))$

(253) ist nur eines von acht sehr änlichen Prinzipien, die die verschiedenen Typen von Nach-Links-Bewegung der Quantoren rechtfertigen. Die Fälle sind aufgelistet in (255).

(255) (i) $B \,\&\, (\exists v_i)A(v_i) \equiv (\exists v_i)(B \,\&\, A(v_i))$ (= (253))
(ii) $(\exists v_i)A(v_i) \,\&\, B \equiv (\exists v_i)(A(v_i) \,\&\, B)$
(iii) $B \vee (\exists v_i)A(v_i) \equiv (\exists v_i)(B \vee A(v_i))$
(vi) $(\exists v_i)A(v_i) \vee B \equiv (\exists v_i)(A(v_i) \vee B)$
(v) $B \,\&\, (\forall v_i)A(v_i) \equiv (\forall v_i)(B \,\&\, A(v_i))$ (= (253))
(vi) $(\forall v_i)A(v_i) \,\&\, B \equiv (\forall v_i)(A(v_i) \,\&\, B)$
(vii) $B \vee (\forall v_i)A(v_i) \equiv (\forall v_i)(B \vee A(v_i))$
(viii) $(\forall v_i)A(v_i) \vee B \equiv (\forall v_i)(A(v_i) \vee B)$

Für jede der Äquivalenzen (i) - (viii) gilt die Bedingung: v_i hat keine freien Vorkommen in B.

Für die bisher betrachteten Formeln - (238), (239) und (248) -
die Prinzipien in (255) aus. Aber im Allgemeinen sind noch zus
Prinzipien gefragt. Beispiele von Formeln, für die die Konstrukt
Pränexform auch diese zusätzlichen Prinzipien in Anspruch nim
die Formeln in (257) und (258). Diese Formeln werden auch im
nächsten Abschnitt eine wichtige Rolle spielen. Beide sind
Konjunkionen, die aus der Prämisse und der Negation des Schlu
uns inzwischen wohlbekannten Argumenten bestehen. (Und zw
es noch einmal um das gültige Argument, dessen Prämisse (239
dessen Schluß (238) ist, sowie um das ungültige Argument, das
ergibt, wenn wir Prämisse und Schluß vertauschen. Die Konjun
sind

(257) $(\exists y)(Q(y) \,\&\, ((\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y))) \,\&$
$\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$

und

---

und $A(v_i)$ beide in M unter a' wahr. Weil v_i keine freien Vorkommen in I
B ebenfalls unter a in M wahr. Und aus dem Umstand, daß $A(v_i)$ in M un
wahr ist, folgt, daß $(\exists v_i)A(v_i)$ in M unter a wahr ist. Also ist $(\exists v_i)(B \,\&\, A(v_i))$ in M unter a wahr.

(258) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y))) \,\&$
$\neg(\exists y)(Q(y) \,\&\, ((\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)))$

Wir werden uns zuerst mit (258) befassen. Mittels jetzt bekan Konstruktionsschritte wird (258) in (259) transformiert:

(259) $(\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y))) \,\&$
$(\forall y)(\neg Q(y) \vee (\exists x)(P(x) \,\&\, \neg R(x,y)))$

Jetzt sollen die Quantoren von (259) nach außen gezogen werde ersten Schritt bewegen wir den Existenzquantor $(\exists y)$ nach vorne er direkt hinter dem Quantor $(\forall x)$ steht und die Formel $\neg P(x)$ i Skopus enthalten ist. Dazu wenden wir das Prinzip (255.iii) auf Disjunktion (260) an:

(260) $\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y))$

Das Ergebnis ist (261):

(261) $(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y)))$

Da (260) und (261) logisch äquivalent sind, gilt dasselbe für di entsprechenden All-Quantifikationen (262) und (263):

(262) $(\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$
(263) $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y)))$

Daaus folgt dann natürlich auch, daß (259) äquivalent ist mit d Konjunktion von (263) und dem zweiten Konjunkt von (259), al der Formel

(264) $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y))) \,\&$
$(\forall y)(\neg Q(y) \vee (\exists x)(P(x) \,\&\, \neg R(x,y)))$.

Eine ähnliche Quantorenbewegung - dieses Mal betrifft sie den $(\exists x)$ - ist im zweiten Konjunkt von (259) möglich. Führen wir di Bewegung in (264) durch, so erhalten wir:

(265) $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y))) \,\&$
$(\forall y)(\exists x)(\neg Q(y) \vee (P(x) \,\&\, \neg R(x,y)))$.

Wir können jetzt das zweite Konjunkt von (265) in den Skopus
Quantoren $(\forall x)$ und $(\exists y)$ bringen. Dazu betrachten wenden wir
das Prinzip (255.vi) an. Dies führt zu der Formel:

(266) $(\forall x)((\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y))) \,\&$
$(\forall y)(\exists x)(\neg Q(y) \vee (P(x) \,\&\, \neg R(x,y))))$

in der sich das letzte Konjunkt jetzt im Skopus von $(\forall x)$, jedoch
nicht im Skopus von $(\exists y)$ befindet. MIt der Absciht, das Konjun
in den Skopus von $(\exists y)$ bringen, betrachten wir die Teilformel

(267) $(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y))) \,\&$
$(\forall y)(\exists x)(\neg Q(y) \vee (P(x) \,\&\, \neg R(x,y)))$

von (266). Diese läßt sich mit Hilfe von (255.ii) in (268) transf

(268) $(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y)) \,\&$
$(\forall y)(\exists x)(\neg Q(y) \vee (P(x) \,\&\, \neg R(x,y))))$

Wiederum folgt aus der logischen Äquivalenz von (267) und (2
auch deren All-Quantifizierungen mit $(\forall x)$ ebenfalls äquivalent
Mit anderen Worten, (266) ist äquivalent mit:

(269) $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y)) \,\&$
$(\forall y)(\exists x)(\neg Q(y) \vee (P(x) \,\&\, \neg R(x,y))))$

Es bleibt jetzt noch, die Quantoren $(\forall y)$ und $(\exists x)$ nach links zu b
so daß auch diese Quantoren alle Literale in ihrem Skopus habe
ist dies nun aber nicht länger möglich, indem wir die Prinzipien
anwenden. Zum Beispiel können wir (255.iii) nicht verwenden,
Quantor $(\forall y)$ über die Disjunktion $\neg P(x) \vee (Q(y) \,\&\, R(x,y))$ nach li
bewegen, weil diese Formel (die Formel B im Schema (255.iii)!) f
Vorkommen von y enthält. Wie sollen wir weiter verfahren?

Der Weg aus dieser Impasse ist einfach: Wir benennen die Vari
die von den noch zu bewegenden Quantoren gebunden sind, in
noch nicht in der formel (269) vorkommende Variablen um. D

wir wählen für die betroffenen Variablen, y und x, neue Variable v für y und u für x, und ersetzen alle Vorkommen der alten Va durch die neuen. Die alte Formel und die, die so entsteht, werd alphabetische Varianten genannt - die Bezeichnung widersdpieg Intuition, daß die Identität einer gebundenen Variable für die Bedeutung der sie enthaltenden Formel nicht wesentlich ist. W die Variable durch eine andere ersetzt, die sich genauso von de in der Formel vorkommenden Variablen unterscheidet w<ie die Variable, die sie ersetzt, so bleibt der Inhalt der Formel von der Substitution unberührt. Mit dieser Beobachtung hängt direkt zusammen, daß alphabetische Varianten immer logisch äquivale Insbesondere ist die Formel

(270) $(\forall y)(\exists x)(\neg Q(y) \vee (P(x) \;\&\; \neg R(x,y)))$

äquivalent mit

(271) $(\forall v)(\exists u)(\neg Q(v) \vee (P(u) \;\&\; \neg R(u,v)))$

und somit ist auch, wie sich leicht feststellen läßt, (269) äquiva

(272) $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee (Q(y) \;\&\; R(x,y)) \;\&$
$(\forall v)(\exists u)(\neg Q(v) \vee (P(u) \;\&\; \neg R(u,v))))$

Jetzt lassen sich die Quantoren $(\forall v)$ und $(\exists u)$ problemlos nach v bewegen, weil ja die Variablen u und v in den links von den Qu stehenden Literalen nicht vorkommen. Das Resultat der Beweg (unter Verwendung von (255.iii) und (255.v)) ist (273)

(273) $(\forall x)(\exists y)\forall v)(\exists u)(\neg P(x) \vee (Q(y) \;\&\; R(x,y)) \;\&$
$(\neg Q(v) \vee (P(u) \;\&\; \neg R(u,v))))$

Die Reihenfolge, in der die Quantoren angehoben werden, ist im Allgemeinen nicht festgelegt, und oft gibt es mehrere Möglichke auch oft zu unterschiedlichen Anordnungen der Quantoren im führen das sich aus den Bewegungen ergibt. Auch im Fall von (hätten wir anders vorgehen können. Zum Beispiel hätten wir z Quantor $(\forall x)$ Skopus über den gesamten Rest der Formel geben und gleich danach den Quantor $(\forall y)$ nach links und damit dire $(\forall x)$ bewegen können. Allerdings setzt das voraus, daß die Umbenennung von y schon zu dem Punkt stattgefunden haben

Wir können übrigens die Umvenennungen schon gleich durchfü daß wir es danach immer nur mit Formeln zu tun haben, in der dieselbe Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt oder mehr als einem Quantor gebunden wird. Fangen wir, ausgehen (259) mit der Umbenennung an und bewegen dann zuerst die (∀x) und (∀v) (die Umbenennung von (∀y)), so bekommen wir in

(274) $(\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \ \&\ R(x,y))) \ \&$
$(\forall v)(\exists u)(\neg Q(v) \vee (P(u) \ \&\ \neg R(u,v)))$

(275) $(\forall x)((\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \ \&\ R(x,y))) \ \&$
$(\forall v)(\exists u)(\neg Q(v) \vee (P(u) \ \&\ \neg R(u,v))))$

(276) $(\forall x)(\forall v)((\neg P(x) \vee (\exists y)(Q(y) \ \&\ R(x,y))) \ \&$
$(\exists u)(\neg Q(v) \vee (P(u) \ \&\ \neg R(u,v))))$

Wir können jetzt auch die beiden Existenzquantoren nach ovrne wobei wiederum die Reihenfolge beliebig ist. Auf diese Weise b wir entweder (277) oder (278)

(277) $(\forall x)(\forall v)(\exists y)(\exists u)((\neg P(x) \vee (Q(y) \ \&\ R(x,y))) \ \&$
$(\neg Q(v) \vee (P(u) \ \&\ \neg R(u,v))))$

(278) $(\forall x)(\forall v)(\exists u)(\exists y)((\neg P(x) \vee (Q(y) \ \&\ R(x,y))) \ \&$
$(\neg Q(v) \vee (P(u) \ \&\ \neg R(u,v))))$

Die Möglichkeit, aus einer gegebenen Formel mehrere Pränexnormalformen mit unterschiedlichen Quantorenpräfixen konstruieren, ist insbesondere im Hinblick auf das Resolutionsv wichtig, weil die Effizienz dieses Verfahrens von der gewählten Pränexformel abhängig sein kann. Die Faustregel hier lautet: V die Pränexformel so zu konstruieren, daß die Existenzquatoren weit links stehen.

Die Formeln (273), (277) und (278) sind nicht nur Pränexforme sind auch Formeln in Disjunktiver Pränexnormalform. Dieses le Ergebnis - daß der quantorenfreie Teil der Formeln in disjunkti Normalform ist, bekamen wir in diesem Fall sozusagen geschenk Normalerweise werden aber noch zusätzliche Operationen erfor sein, um auch den quantorenfreien Teil in die gewünschte Form bringen. Wollen wir z.B eine konjunktive Pränexnormalform fü so ist noch zusätzliche Arbeit nötig. (279) gibt die konjunktive Pränexnormalform für (273)

(279) $(\forall x)(\exists y)(\forall v)(\exists u)((\neg P(x) \vee Q(y)) \& (\neg P(x) \vee R(x,y)) \&$
$(\neg Q(v) \vee P(u)) \& (\neg Q(v) \vee \neg R(u,v)))$

Wir schließen diesen Abschnitt ab mit einer konjunktiven Prän Normalform für die Formel (257). Es ist dem leser überlassen, z verifizieren, daß (280) in der Tat eine konjunktiven Pränex-No von (257) ist.

(280) $(\exists y)(\forall x)(\exists u)(\forall v)(Q(y) \& (\neg P(x) \vee R(x,y)) \&$
$(P(u) \& (\neg Q(v) \vee \neg R(u,v)))$

4.2.2 Die Skolem-Normalform.

Es ist möglich, die Quantorenstruktur einer Pränex-Formel zu vereinfachen, indem man die im Quantorenpräfix enthaltenen Existenzquantoren durch Funktionskonstanten ersetzt. Auf dies erhalten wir eine Pränexformel, deren Präfix nur noch All-Quar enthält. (Solche Pränexformeln, in denen nur All-Quantoren vorkommen, werden rein universale Formeln genannt.) Die Erg dieser Transformation sind unter dem Namen Skolem-Normalfo (der Formeln, aus denen sie abgeleitet wurden) bekannt.

Zur Illustration des Skolem-Normalform- Konstruktionsverfahre betrachten wir gleich ein Beispiel, und zwar die Formel

(281) $(\forall x)(\exists y)\ R(x,y)$

Diese Formel ist in Pränexform. Ihre Transformation in eine Sk Normalform erfordert die Eliminierung des Quantors $(\exists y)$ bei gleichzeitiger Ersetzung der Vorkommen der Variable y in dem Quantorenfreien Teil $R(x,y)$ durch einen funktionalen Term, der einer neuen Funktionskonstante f gebildet wird. Die Idee, auf c Transformation basiert, ist folgende. Nehmen wir an, M sei ein in dem die Formel $(\forall x)(\exists y)\ R(x,y)$ wahr ist. Das bedeutet, daß es jedes Objekt a, das wir der Variable x als Wert zuordnen könner

Objekt b (als Wert für y!) geben muß, so daß a und b in der Bez R_M stehen. Man kann diese Bedingung auch so formulieren: Es eine Funktion F, die jedem Objekt a aus U_M ein entsprechendes aus U_M zuordnet, so daß zwischen a und b (= F(a)) die Beziehung besteht. Mit anderen Worten: Das Wahr-Sein von (281) implizi Existenz einer solchen Funktion F. Existiert umgekehrt eine solc Funktion F, dann ist natürlich auch (281) wahr. Denn gilt für je Objekt a, daß es in der Beziehung R_M zu F(a) steht, dann gibt es jedes a ein Objekt b (nämlich F(a)), zu dem a in dieser Beziehun

Zusammenfassend können wir also sagen: (281) ist genau dann wahr, wenn es eine Funktion F von der oben beschriebenen Art Diese letzte Äquivalenz läßt sich nun auch folgendermaßen paraphrasieren:

(282) (281) ist wahr genau dann wenn es möglich is, die einst Funktionskonstante f so zu interpretieren, daß die Forme $(\forall x)\ R(x, f(x))$ wahr ist.

In (282) ist das gesamte Prinzip, das der Skolem-Normalform zugrundeliegt, im Kern schon erfaßt. Wir brauchen es nur noch allgemeineren Form zu fassen, wie wir dies in (271) machen:

(283) Ein Satz $(\forall x_1)...(\forall x_n)(\exists y)\ A(x_1,..., x_n, y)$ ist genau dann w wenn es eine n-stellige Funktion $F(x_1,..., x_n)$ gibt, so daß f möglichen Kombinationen $a_1,..., a_n$ von Objekten das n-Tu $\langle a_1,..., a_n, F(a_1,..,a_n)\rangle$ die Formel $A(x_1,..., x_n, y)$ erfüllt; und genau dann der Fall, wenn die Formel $(\forall x_1)...(\forall x_n)A(x_1,..., x_n, f(x_1,..., x_n))$, mit einer neuen n-stel Funktionkonstante f, durch eine geeignete Interpretation verifiziert wird.

Das Prinzip (283) erlaubt es, die Existenzquantoren eines Quantorenpräfixes von links nach rechts gehend systematisch d Funktionskonstanten zu ersetzen, wobei jede neue Funktionsko als Argumente immer all die Variablen nimmt, die durch All-Qu links von dem betroffenen Existenzquantor stehen. (Also muß, einem Existenzquantor n All-Quantoren vorangehen, die entsp Funktionskonstante n-stellig sein.)

(284) ist ein Beispiel von einer Formel mit zwei Existenzquantor

(284) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w)\ S(x,y,z,w)$

Eine Skolem-Normalform für (284) ist (285)

(285) $(\forall x)(\forall z)S(x,f(x),z,g(x,z))$

Es sei zu beachten, daß die in (285) für $(\exists y)$ eingesetzte Funktionskonstante f nur x als Argument hat und deshalb einst während die für $(\exists w)$ eingesetzte Konstante g sowohl x als auch Argumente hat. somit zweistellig ist.

Die in den beiden vorigen Abschnitten beschriebenen Normalfc hatten die Eigenschaft, dass die Normalform einer Formel imme dieser Formel logisch äquivalent war. Das heißt, Formel und Normalform haben in allen Modellen für die prädikatenlogische der sie beide angehören, unter allen Belegungen denselben Wahrheitswert haben.[19] Die Beziehung zwischen einer Pränexfc und ihrer Skolem-Normalform ist eine andere und sie ist etwas komplizierter. Einerseits folgt die Pränexformel immer logisch Skolem-Normalform. Denn ist letztere wahr, so gilt, daß es zu je möglichen Kombination von Werten für die all-quantifizierten Werte für die Existenz-quantifizierten Variablen gibt, die zusam den Werten für die all-quantifizierten Variablen den quantore Teil der Formel erfüllen.

Andererseits aber ist es nicht so, daß in jedem Modell, in dem d Asugangsformel gilt, auch ihre Skolem-Normalform gelten muss. Betrachten wir, um so das semantische Verhältnis zwischen Ausgangsformel und Skolem-Normalform besser zu erkennen, n Mal die Formel $(\forall x)(\exists y)$ R(x,y). Sei M ein beliebiges Modell, in der Formel wahr ist. Wäre die Skolemformel $(\forall x)$ R(x, f(x)) eine logis Folge der Formel, so müsste auch sie in M wahr sein. Ist sie das

Diese Frage läßt sich nicht ohne Weiteres beantworten. Denn fü Modelle M, in denen die Ausgangsformel wahr ist, läßt sich die S Normalform gar nicht evaluieren. Der Grund ist, daß die Skolem Allegemeinen einer reicheren Sprache L' angehört als die Spache der Ausgangsformel. (Die neu eingeführten Skolemkonstanten ja im Normalfall nicht zu L.) Ist also M ein Modell für L und nicht dann läßt sich die Skolemform in M nicht evaluieren. Betrachte

---

19 In dem Fall, wo die Ausgangsformel (und deshalb auch ihre Normalf freie Variablen entghalten, werden die beiden formeln denselben Wahr in jedem Modell unter jeder belegung haben.

andererseits Modelle für L', in denen sowohl die Ausgangsformel Skolemform evaluiert werden können, dann hat die Frage: "Ist Skolemform von A wahr in M, wenn A in M wahr ist?" zwar imm Antwort, aber es ist auch gleichzeitig klar, daß diese Antwort ni immer positiv sein wird. Ein einfaches Beispiel reicht, um dies z zeigen. Sei M das folgendermaßen definierte Modell für die Sprac f}: U_M = {a,b}; R_M = {<a,a>, <b,b>}; f_M = {<a,b>, <b,a>}. Es läßt sich leic verifizieren, daß (∀x)(∃y) R(x,y) wahr ist in M, aber (∀x) R(x, f(x))

Die modellheoretische Beziehung zwischen Ausgangsformel und Skolemform, auf der die im nächsten Abschnitt vorgestellte Resolutionsmethode basiert, hat weder ausschließlich mit den M für die Sprache L der Ausagangsformel, noch auch ausschließlich den Modellen für die Sprache L' der Skolemform zu tun, sonder beiden zugleich. Ein Modell M für die Sprache L kann immer zu Modell M' für L' expandiert werden, indem man ihm Interpreta für die Skolemkonstanten hinzufügt, die Teil von L' aber nicht v sind. Im Allgemeinen gibt es für ein gegebenes Modell M viele s Expansionen. Denn ist f eine n-stellige Skolemkonstante, so kann Prinzip jede n-stellige Funktion on U_M nach U_M die Interperpre von f in M' sein. Ist nun aber M ein Modell für L, in dem die Ausgangsformel A wahr ist, dann gibt es immer mindestens ein Expansion M' von M, in der die Skolemform wahr ist. Wegen sei Bedeutung für die Resolutionsmethode formlieren wir dieses Pr noch einmal explizit in (270)

(285) Sei A eine Pränex-Formel, die der Prädikatenlogischen Sp angehört. Sei A' eine aus A abgeleitete Skolemform, zu de Konstruktion die nicht zu L gehörigen Funktionskonstante f_1^{n1}, ..., f_k^{nk} eingeführt wurden. Dann gibt es für jedes M für die Sprache L, und Belegung a in M, so daß A in M unte wahr ist, eine Expansion M' für die Sprache L' = L ∪ {f_1^{n1}, ..., f_k^{nk}}, so daß A' unter a in M' wahr ist.

Der Beweis von (285) im Detail durchzuführen, ist nicht ganz tr auch auf diesen Beweis verzichten wir hier. Grundsätzlich ist da Argument aber mit dem identisch, das oben für den besonderen (280) gegeben wurde.

Zusammen mit der obigen Beobachtung, daß eine Formel A logisc ihrer Skolem-Normalform folgt, hat (285) die folgende Konseque

(286) Sei A' eine Skolem-Normalform für die Formel A. Dann ist logischer Widerspruch genau dann, wenn A ein logischer Widerpsruch ist.

Beweis: Ist A ein logischer Widerspruch, dann ist auch A' ein lo Widerspruch. Denn wäre A' kein logischer Widerspruch, dann g ein Modell M', in dem A' wahr wäre. Dann aber wäre, da A eine Folge von A' ist, auch A wahr in M und somit wäre A kein Wider

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, A' sei ein Widerspruch. Wäre A Widerspruch, dann gäbe es ein Modell M in der Sprache L von A A wahr wäre. Dann gibt es aber nach (285) eine Expansion M' v die Sprache L' von A', in dem A' wahr wäre; und folglich könnte Widerspruch sein.

q.e.d.

Das Prinzip (286) beinhaltet, daß wir, um die Widersprüchlichke Formel A zu testen, die Widersprüchlichkeit ihrer Skolem-Norm überprüfen können. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werd sich diese letztere Untersuchung auf zwei im Grunde sehr einfa Operationen reduzieren. Damit haben wir ein Beweisverfahren, ihre allgemeine Form betrifft, besonders einfach ist: Man bildet Konjunktion der Prämissen des gegebenen Arguments zusamme der Negation seines Schlusses, konstruiert die Skolem-Normalfor diese Konjunktion und zeigt die Widersprüchlichkeit dieser Skolemformel.

Inwiefern diese Methode es erlaubt, die wesentliche Probleme, man bei anderen prädikatenlogischen Beweismethoden begegne in den Griff zu bekommen, ist allerdings eine andere Frage. Die Anfang unseres Überblicks über die verschiedenen prädikatenl Beweismethoden schon gemachte Bemerkung, daß es (nach den berühmten Resultaten von Gödel und Church aus den dreißiger für Gültigkeit prädikatenlogischer Argumente kein Entscheidun verfahren gibt, bedeutet, daß auch die Resolutionsmethode kein Verfahren sein kann. Mit anderen Worten, es kann kein Verfah geben, das für beliebige Formeln in Skolem-Normalform feststell widersprüchlich sind.

In unserer Diskussion der Pränexnormalform beobachteten wir, einunddieselbe Prädikatenlogische Formel oft mehrere Pränexf konstruiert werden können. Zum Beispiel kann die Formel (257

(257) $(\exists y)(Q(y) \;\&\; ((\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y))) \;\&$
$\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \;\&\; R(x,y)))$

in die zwei Pränexformen (266) und (267) transformiert werde

(287) $(\exists y)(\forall x)(\exists u)(\forall v)(Q(y) \;\&\; (\neg P(x) \vee R(x,y)) \;\&$
$(P(u) \;\&\; (\neg Q(v) \vee \neg R(u,v)))$

(288) $(\exists y)(\exists u)(\forall x)(\forall v)(Q(y) \;\&\; (\neg P(x) \vee R(x,y)) \;\&$
$(P(u) \;\&\; (\neg Q(v) \vee \neg R(u,v)))$

Jede dieser beiden Pränexformeln kann nach dem soeben besc Verfahren in eine Skolem-Form verwandelt werden:

(289) $(\forall x)(\forall v)(Q(c) \;\&\; (\neg P(x) \vee R(x,c)) \;\&$
$(P(f(x)) \;\&\; (\neg Q(v) \vee \neg R(f(x),v)))$

(290) $(\forall x)(\forall v)(Q(c) \;\&\; (\neg P(x) \vee R(x,c)) \;\&$
$(P(d) \;\&\; (\neg Q(v) \vee \neg R(d,v)))$

In (287) ist der erste Existenzquantor $(\exists y)$, der sich im Skopus v keinem All-Quantor befindet, durch eine 0-stellige Funktionsko also durch eine Individuenkonstante ersetzt worden (und zwar die Konstante c). Für den zweiten Existenzquantor $(\exists u)$, hingege eine 1-stellige Funktionskonstante f eingeführt und die von der Quantor gebundene Variable überall durch den Term f(x) erset: Wenden wir dasselbe Verfahren jetzt auf die andere Pränexforn an, so ergibt sich eine Skolemform, in der beide Existenzquanto: durch Individuenkonstanten ersetzt sind, und der die Abhängi x, die wir in (289) in Form des Terms "f(x)" finden, nicht länger Wie (290) zeigt, läßt sich diese Abhängigkeit im gegebenen Fall a vermeiden. In der Tat ist sie in (289) ein Artefakt, das seine U in der dort getroffenen Entscheidung hatte, den Existenzquantor (287) an eine Stelle rechts von dem All-Quantor $(\forall x)$ zu bewegen Entscheidung ist aber, wie uns die Formel (288) zeigt, nicht erz

Ein ähnlicher aber dramatischerer Unterschied zwischen zwei S Normalformen für dieselbe Ausgangsformel findet sich in den F (291) - (297). Für die Formel (274) gibt es (u.a.) die drei Pränexnormalformen (292)-(294). Diesen Pränexformeln ents die Skolemformeln (295) - (297). Vergleicht man insbesondere "Skolem-Terme" der Formel (297) mit denen der Formel (296), die unterschiedliche Komplexität der quantorenfreien Teile die Formeln ins Auge.

(291) $(\forall x)(\exists y)\ R(x,y)\ \&\ (\exists u)(\forall v)(\forall w)\ (\neg R(u,v) \vee \neg R(v,w))$

(292) $(\exists u)(\forall x)(\exists y)(\forall v)(\forall w)(R(x,y)\ \&\ (\neg R(u,v) \vee \neg R(v,w)))$

(293) $(\forall x)(\exists y)(\exists u)(\forall v)(\forall w)(R(x,y)\ \&\ (\neg R(u,v) \vee \neg R(v,w)))$

(294) $(\exists u)(\forall v)(\forall w)(\forall x)(\exists y)(R(x,y)\ \&\ (\neg R(u,v) \vee \neg R(v,w)))$

(295) $(\forall x)(\forall v)(\forall w)(R(x,f(x))\ \&\ (\neg R(c,v) \vee \neg R(v,w)))$

(296) $(\forall x)(\forall v)(\forall w)(R(x,f(x))\ \&\ (\neg R(g(x),v) \vee \neg R(v,w)))$

(297) $(\forall v)(\forall w)(\forall x)(R(x,h(v,w,x))\ \&\ (\neg R(c,v) \vee \neg R(v,w)))$

Wir werden die Implikationen dieser Unterschiede für das im r Teilabschnitt dargestellte Resolutionsverfahren dort in Einzelhe betrachten.

4.3 Beweisverfahren durch Resolution.

Wie wir in der Einführung zu diesem Abschnitt schon bemerkte beruht das Resolutionsverfahren auf demselben Grundprinzip v Tableaumethode: Dem Prinzip, daß ein Argument $A_1, ..., A_n \models B$ g dann gültig ist, wenn die Formel $A_1 \& ... \& A_n \& \neg B$ ein Widerspru Die Gültigkeit des Arguments läßt sich also nachweisen, indem n Widersprühlichkeit der Konjunktion beweist. Im Fall der Resolutionsmethode geht man dabei wie folgt vor: Man konstru Skolem-Normalform für die Formel und versucht, die dann so zu manipulieren, daß ihre Widersprüchlichkeit - solllte sie denn widersprüchlich sein - unmittelbar erkennbar wird. Im Allgem läßt sich diese Bearbeitung der Skolem-Normalform in zwei Teile unterteilen: (i) Instanziierung der im Quantorenpräfix universa gebundenen Variablen - auf diese Weise wird eine Konjunktion qunatorenfreier Formeln gebildet; und (ii) "Klauselresolution", e Operation, die nur die so entstandene quantorenfreie Konjunkt betrifft, und also zur Aussagenlogik gehört.

Gehen wir von einem quantorenfreien Argument aus (d.h. von Argument, bei dem weder in den Prämissen noch im Schluß Qu vorkommen), so wird auch die entsprechende "Skolem-Normalf eine quantorenfreie Formel sein. In einem solchen Fall gibt es k Quantoren, die man instanziieren könnte, und somit beschränkt Manipulierung der Skolemformel auf die Klauselresolution. Für klare Darstellung von diesem Teil der Skolem-Normalformbearb empfiehlt es sich, zuerst ein Argument des Aussagenkalküls zu betrachten, bei dem es nach der Berechnung der konjunktiven Normalform nur noch um Klauselresolution geht.

Dazu betrachten wir noch einmal unser Paradebeispiel

(298) $p \,\&\, (q \vee r) \models (p \,\&\, q) \vee r$

Die konjunktive Normalform der Konjunktion von Prämisse und von (272) also der Fromel $(p \,\&\, (q \vee r)) \,\&\, \neg((p \,\&\, q) \vee r)$ - ist

(299) $p \,\&\, (q \vee r) \,\&\, (\neg p \vee \neg q) \,\&\, \neg r$

Daß (282) ein Widerspruch ist, wird durch die folgenden Transformationschritten direkt sichtbar. (i) (282) enthält die k p und $\neg p \vee \neg q$. Aus diesen beiden läßt sich mit Hilfe des Schem (300) die Formel $\neg q$ ableiten.

(300) $$\frac{A,\ \neg A \vee B}{B}$$

Da $\neg q$ aus einem Paar von Konjunkten ider Konjunktion (282) f können wir sie der Konjunktion als zusätzliches Konjunkt hinzu ohne daß diese ihre "logische Bedeutung" ändert - d.h. die erwe Konjunktion ist mit der ursprünglichen Konjunktion (283) logis äquivalent. Die neue Konjunktion enthält nun die Konjunkte $\neg$ q $q \vee r$ und das mit (283) sehr ähnliche Prinzip (284)

(301) $$\frac{\neg A,\ A \vee B}{B}$$

erlaubt es, aus diesen beiden den Schluß r zu ziehen. Wiederum wir bei Erhaltung der logischen Bedeutung diese Formel als zusä Konjunkt hinzufügen. Jetzt haben wir eine Konjunktion, die un Konjunkten die Formeln $\neg r$ und r zählt. Eine solche Konjunktion ein expliziter Widerspruch. Damit ist der gesuchte Nachweis de Widersprüchlichkeit von (299) geliefert.

Ein etwas anspruchsvolleres Beispiel, in dem die Atome keine Aussagenkonstanten sondern atomare Formeln der Prädikatenlo ist, (302).[20]

(302) $\neg P(a) \rightarrow (P(b) \vee P(c))$, $P(a) \rightarrow (\neg P(f(a)) \rightarrow P(c)))$, $P(b) \rightarrow (\neg P(f(a)) \rightarrow P(f(c)))$, $[P(b) \vee (P(f(a)) \vee P(f(b)))]$, $P(f(a)) \rightarrow (P(c) \& P(f(b)))$, $P(f(c)) \rightarrow P(f(a))$, $\neg P(c) \vee P(b)$ $\vdash P(b) \& P(f(b))$

Wir überlassen es dem Leser, zu überprüfen, daß (303) die kor Normalform der Konjunktion von den Prämissen von (302) zus mit der Negation der Schlussformel ist.

(303) (i) $(P(a) \vee P(b) \vee P(c))$ & (ii) $(\neg P(a) \vee P(f(a)) \vee P(c))$ & (iii) $(\neg P(b) \vee P(f(a)) \vee P(f(c)))$ & (iv) $(\neg P(f(a)) \vee (P(c))$ & (v) $(\neg P(f(a)) \vee P(f(b)))$ & (vi) $(\neg P(f(c)) \vee P(f(a))$ & (vii) $(\neg P(c) \vee P(b))$ & (viii) $(\neg P(b) \vee \neg P(f(b))$

(303) erlaubt keine Anwendung der Schemata (300) und (301). aber eine Generalisierung dieser beiden Prinzipien, die es uns ermöglicht, die ersten Schritte einer Transformation der Formel durchzuführen, die ihre Widersprüchlichkeit transparent macht. hier intenderten Anwendung dieses generalisierten Prinzips we ersten beiden Konjunkte von (303) als Prämissen verwendet. D Konjunkt enthält als eines seiner Disjunkte die Formel P(a), wäh und das zweite Konjunkt deren Negation $\neg$ P(a) als Disjunkt entl Deshalb läßt sich aus diesem Paar die Disjunktion
$P(b) \vee P(c) \vee P(f(a)) \vee P(c)$ ableiten, die aus den sonstigen Disjun zwei Konjunkte besteht, aber in der weder P(a) noch $\neg$ P(a) vorl Das generalisierte Prinzip, das wir hier angewandt haben, läßt s folgt formulieren:

[20] Für das Verfahren, um das es hier geht, ist dies natürlich unwesent interne Struktur von, z.B. einem Atom wie P(f(a)) ist für dieses Verfahren keiner Bedeutung, und der Punkt, der mit Beispiel illustriert werden soll, der Frage, wie die Atome aussehen, unabhängig. Der Grund, w<eshalb in d zweiten Beispiel prädikatenlogische Atome gewähnlt wurden, ist der, daß d beschriebene Verfahren vor allem im Rahmen prädikatenlogischer Ded ver<wendet wird, und dort sind die Atome fast immer von der in diesem B exemplifizierten Art.

(304) $$\frac{A_1 \text{ v} \ldots \text{ v } C \text{ v} \ldots \text{ v } A_n,\ B_1 \text{ v} \ldots \text{ v } \neg C \text{ v} \ldots \text{ v } B_m}{A_1 \text{ v} \ldots \text{ v } A_n \text{ v } B_1 \text{ v} \ldots \text{ v } B_m}$$

Nach (304) kann man, wenn eine von zwei Disjunktionen eine Fo und die andere die Negation ¬C als Disjunkt enthält, aus der Kombination der Disjunktionen eine Disjunktion ableiten, deren Disjunkte alle Disjunkte der ersten Disjunktion außer C zusamm allen Disjunkten der zweiten Disjunktion außer ¬C enthält. Daß Prinzip korrekt ist (d.h. nie aus wahren Prämissen einen falsche abzuleiten erlaubt), läßt sich leicht zeigen: Nehmen wir an, die Prämissen von (304) sind beide wahr. Bezüglich C gibt es zwei Möglichkeiten: entweder ist C wahr oder C ist falsch. Im ersten ¬C falsch und da die zweite Prämisse wahr ist, muß also eines d Disjunkte B_j wahr sein. Aber dann ist auch A_1 v ... v A_n v B_1 v... wahr. Im zweiten Fall - C ist falsch - ist wegen Wahrheit der ers Prämisse eines der Disjunkte wahr und also ist auch in diesem F Disjunktion A_1 v ... v A_n v B_1 v... v B_m wahr.

Es sollte klar sein, daß (304) eine Generalisierung von sowohl (3 auch (301) ist. (300) entspricht dem Fall n = 0, m = 1, (301) de n = 1, m = 0.

Wir können (304) auf die ersten beiden Konjunkte von (303) a indem wir C mit der Formel P(a) indentifizieren und die Formel und P(c) als Disjunkte A_1 und A_2 sowie P(f(a)) und P(c) als B_1 ur betrachten. Der Schluß A_1 v A_2 v B_1 v B_2 - also: P(b) v P(c) v P(P(c) - kann nun wiederum (303) als zusätzliches Konjunkt ange werden (d. h. die so entstehende Formel ist mit (303) äquivaler dann auch gleich eines von den beiden Vorkommen von P(c) in entstehenden Disjunktion getilgt werden kann. Die neue Konjur die Formel (305):

(305) (i) (P(a) v P(b) v P(c)) & (ii) (¬ P(a) v P(f(a)) v P(c)) &
(iii) (¬ P(b) v P(f(a)) v P(f(c))) & (iv) (¬P(f(a)) v (P(c)) &
(v) (¬P(f(a)) v P(f(b))) & (vi) (¬P(f(c)) v P(f(a)) &
(vii) (¬ P(c) v P(b)) & (viii) (¬P(b) v ¬P(f(b))) &
(ix) (P(b) v P(c) v P(f(a)))

(304) läßt sich auch auf die Konjunkte (iii) und (vi) anwenden. ergibt sich die Formel ¬P(b) v P(f(a)), die wir als (x)-tes Konjunk Konjunktion (288) hinzufügen können. (x) ergibt zusammen mi

unter abermaligen Anwendung von (304) die Formel ¬P(b) v P(wir asl Konjunkt (xi) hinzufügen. Anwendung von (304) auf (xi) (viii) ergibt dann ¬P(b), und jetzt sind wir zuletzt in der Lage, v einem der einfacheren Prinzipien Gebrauch zu machen, die für vorige Beispiel ausreichten: Indem wir (301) auf ¬P(b) und das Konjunkt anwenden, bekommen wir ¬P(c). Eine zweite Anwendu (301) auf ¬P(c) und das iv-te Konjunkt gibt uns ¬P(f(a)). ¬P(f(a ergibt zusammen mit dem schon inferierten Konjunkt (ix) die Disjunktion P(b) v P(c), die dann zusammen mit der schon abge Formel ¬P(b) zu P(c) führt. Letztere steht nun in direktem Wic zu dem schon vorher abgeleiteten Konjunkt ¬P(c).

Die schrittweise Expansion von (304) mit den im letzten Absatz erwähnten Formeln hat die Gestalt (305)

(305) (i) (P(a) v P(b) v P(c)) & (ii) (¬ P(a) v P(f(a)) v P(c)) &
(iii) (¬ P(b) v P(f(a)) v P(f(c))) & (iv) (¬P(f(a)) v (P(c)) &
(v) (¬P(f(a)) v P(f(b))) & (vi) (¬P(f(c)) v P(f(a)) &
(vii) (¬ P(c) v P(b)) & (viii) (¬P(b) v ¬P(f(b))) &
(ix) (P(b) v P(c) v P(f(a))) & (x) (¬P(b) v P(f(a))) &
(xi) (¬P(b) v P(f(b)) & (xii) ¬P(b) & (xiii) ¬P(c) &
(xiv) ¬P(f(a)) & (xv) (P(b) v P(c)) & (xvi) P(c)

4.3.1 Resolution von quantifizierten Skolemformeln u Unifikation von Termen

Da (300) und (301) Spezialfälle von (304) sind, kann man die b Behandlung der Beispiele (299) und (303) durchgeführten Pro auch als Verkettungen von Anwendungen des letzteren Prinzips von (304) sehen. Es sind also beide Instanzen eines Verfahrens ausschließlich aus wiederholter Anwendung dieses letzteren Pri beruht. Dieses Verfahren ist das eigentliche Resolutionsverfahr

Das Resolutionsverfahren im eigentlichen Sinne ist damit vollstä beschrieben. Wir fassen es noch einmal kurz zusammen: Durch wiederholte Anwendung von (304) auf eine Konjunktive Norma wird diese Normalform schrittweise um neue Konjunkte erweite jeder Anwendung wird aus der bis dahin erstellten Konjunktion geeignetes Paar von Konjunkten ausgewählt und die Formel, die durhc Anwendung von (304) daraus ablietet, wir als Konjunkt hinzugefügt. Die Prozerdur wird so lange wiederholt, bis die Konjunktion eine atomare Formel C als Konjunkt enthält mit der Eigenschaft, daß auch ¬ C als Konjunkt vorkommt.

Obwohl das Resolutionsverfahren jetzt expizit beschrieben wurd das, was wir bis zu diesem Punkt über das Verfahren insgesamt haben, alles eigentlich nur das Vorspiel zum eigentlichen Drama. das Kernproblem der Resoltionsmethode ist die Frage, wie man Skolem-Normalform zu einer geeigneten Konjunktion von quantorenfreien Instanziierungen gelangt, auf die dann das ob beschriebene Resolutionsverfahren angewendet werden kann.

Um dieses Kernproblem zu erläutern, betrachten wir wiederum ein Beispiel, und zwar beziehen wir uns noch einmal auf das Ar das schon mehrfach herhalten mußte: das Argument, dessen Scl ∀∃-Lesart von einem Satz wie "Ein Artikel ist von jedem Studente diesem Seminar gelesen worden." und die ∃∀-Lesart des Satzes c einzige Prämisse ist:

(306) $(\exists y)(Q(y) \,\&\, (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y))) \vdash$
$(\forall x)(P(x) \rightarrow ((\exists y)(Q(y) \,\&\, R(x,y)))$

(Vgl. (238) und (239))

Für die Formel, die diesem Argument entspricht (die Konjunktic der Prämisse und der Negation des Schlußes; vgl. (257)), haben vorigen Teilabschnitt mit (272) und (273) schon zwei Skolem-Normalformen konstruiert:

(289) $(\forall x)(\forall v)(Q(c) \,\&\, (\neg P(x) \vee R(x,c)) \,\&$
$(P(f(x)) \,\&\, (\neg Q(v) \vee \neg R(f(x),v)))$

(290) $(\forall x)(\forall v)(Q(c) \,\&\, (\neg P(x) \vee R(x,c)) \,\&$
$(P(d) \,\&\, (\neg Q(v) \vee \neg R(d,v)))$

Betrachten wir zuerst (289). Wir wollen die Widersprüchlichkei Formel zeigen, indem wir die All-Quantoren instanziieren und d Konjunktion dieser Instanziierungen dann durch Anwendungen (304) zu einem expliziten Widerspruch expandieren.

Aber welche Instanziierungen sind zu wählen? Um das beurteil können, müssen wir eigentlich schon wissen, was uns bei der Anwendung des Resolutionsverfahrens zum expliziten Widerspr verhelfen könnte. In diesem Fall ist die Lösung verhältnismäßig insofern nur eine Instanziierung nötig ist. Sie involviert die Su von dem Term F(c) für x und von der Konstante c für v. Wir be diese Substitution wie folgt: x:= f(c); v:= c.

(307) (i) Q(c) & (ii) (¬P(f(c)) v R(f(c),c)) & (iii) P(f(c)) &
(iv) (¬Q(c) v ¬R(f(c),c))

Zur Ableitung eines Widerspruchs reichen diesmal wieder die besonderen Prinzipien (283) und(284): Aus (i) und (iv) ist das ¬R(f(c),c) abzuleiten, und aus (ii) und (iii) das Literal R(f(c),c); u ist ein expliziter Widespruch gefunden.

Im Fall von (290) besteht kein großer Unterschied zwischen der Anwendung des Resolutionsverfahrens (inklusive der Quantore Instanziierungen) auf die Skolemform (272) und ihre Anwendu die alternative Form (273). Wählen wir (273), so reicht wieder einzige Substitution und zwar die etwas einfachere: x:= c; v:= c. Allgemeinen hat die Wahl der Skolemform aber bedeutsamere E Erstens hängt es manchmal von dieser Wahl ab, wieviele Instanziierungen erforderlich sind, und zweitens bestimmt sie c welche Terme für die Variablen substituiert werden sollen. Wir dies an zwei immer noch recht einfachen Beispielen. Das erste I wurde im Abschnitt 4.2.2 schon diskutiert. Dort wurde gezeigt, Formel (274) in unterschiedliche Pränexformen und damit in untereschiedliche Skolemformen transformiert werden kann. V wiederholen die Formel (274) sowie die drei verschiedenen Pränexformen (275)-(277), die wir in 4.2.2 von ihr ableiteten s diesen entsprechenden Skolem-Normalformen (278)-(280) noch

(291) (∀x)(∃y) R(x,y) & (∃u)(∀v)(∀w) (¬ R(u,v) v ¬ R(v,w))

(292) (∃u)(∀x)(∃y)(∀v)(∀w)(R(x,y) & (¬ R(u,v) v ¬ R(v,w)))
(293) (∀x)(∃y)(∃u)(∀v)(∀w)(R(x,y) & (¬ R(u,v) v ¬ R(v,w)))
(294) (∃u)(∀v)(∀w)(∀x)(∃y)(R(x,y) & (¬ R(u,v) v ¬ R(v,w)))

(295) (∀x)(∀v)(∀w)(R(x,f(x)) & (¬ R(c,v) v ¬ R(v,w)))
(296) (∀x)(∀v)(∀w)(R(x,f(x)) & (¬ R(g(x),v) v ¬ R(v,w)))
(297) (∀v)(∀w)(∀x)(R(x,h(v,w,x)) & (¬ R(c,v) v ¬ R(v,w)))

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß (274) als Transformati Konjunktion von Prämisse und Negation des Schlußes des Argur

(308) $(\forall x)(\exists y)\ R(x,y) \vdash (\exists x)(\forall y)(\forall w)\ (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,w))$

betrachtet werden darf. (274) ergibt sich aus dieser Konjunkti nachdem die Negation des zweiten Konjunkts ganz nach innen g und die Variablen x und y des zweiten Konjunkts in u und v u worden sind. Daß (292) gültig ist, ist leicht einzusehen. Denn gil jedes beliebige x ein y, so daß R(x,y), dann kann man insbesond für ein solches y wieder ein w finden, so daß R(y,w).

Für den Widerspruchsnachweis von (291) ist die Skolem-Form i die geschickteste. In dieser Formel haben die Existenzquantorer Einführung einer Individuenkonstante c und einer einstelligen Funktionskonstante f geführt. Um den Widerspruch abzuleiten, brauchen wir insgesamt zwei Substitutionen für die aall-quanti Variablen von (295). Diese sind in (309.a) unter (1) und (2) sp (309.b) gibt die Konjunktion der entsprechenden Instanziierun (295)

(309) (a) (1) x:= c; v:= f(c); w:= f(f(c))

(2) x:= f(c); v:= c; w:= c

(In (2) sind die Substitutionen für v und w vo keiner praktischen Bedetung.)

(b) (1.i) $R(c,f(c))$ & (1.ii) $(\neg R(c,f(c)) \vee \neg R(f(c),f(f(c))))$

(2.i) $R(f(c),f(f(c)))$ & (2.ii) $(\neg R(c,c) \vee \neg R(c,c))$

Aus (309.b) ergibt sich ein expliziter Widerspruch fast unmitte Aus (1i) und (1.ii) ist $\neg R(f(c),f(f(c)))$ ableitbar. Die Formel R(f(c) ist aber schon Konjunkt von (309.b).

Gehen wir bei der Resolution nicht von (295) sondern von der Skolemform (296) aus, so werden die Instanziierungen etwas komplizierter, obwohl man aber auch in diesem Fall nur zwei Instanziierungen braucht. Die Substitutionen und die Konjunkt entsprechenden Instanziierungen von (296) sind in (310.a,b) a

(310) (a) (1) x:= c; v:= f(g(c)); w:= f(f(g(c)))

(2) x:= f(g(c)); v:= c; w:= c

(In (2) sind wiederum die Substitutionen für v und w ohne praktische Bedeutung.)

(b) (1.i) R(c,f(c)) &
(1.ii) (¬ R(g(c),f(g(c))) v ¬ R(f(g(c),f(f(g(c))))) &
(2.i) R(f(g(c)),f(f(g(c)))) & (2.ii) (¬ R(c,c) v ¬ R(c,c)

Auch diesmal läßt sich aus (1.i) und (1.ii) ein direkter Widerspr (2.i) ableiten.

Die dritte Skolemform (297) führt im wesentlichen zu demselbe Widerspruchsbeweis, aber diesmal scheint ein Minimum von dr Substitutionen unvermeidlich. Überdies sehen die Substitution der drei-stelligen Funktionskonstante, die (297) enthält, noch komplizierter aus als im letzten Fall. (311.a) gibt die Substituti (311.b) die Konjunktion der Instanziierungen.

(311) (a) (1) x:= c; v:= c; w:= c

(2) x:= c; v:= h(c,c,c); w:= h(c,c,h(c,c,c))

(3) x:= h(c,c,c); v:= c; w:= c

(b) (1.i) R(c,h(c,c,c)) & (1.ii) (¬ R(c,c) v ¬ R(c,c)) &
(2.i) R(c,h(h(c,c,c),c,c)) &
(2.ii) (¬ R(c,h(c,c,c)) v ¬ R(h(c,c,c),h(c,c,h(c,c,c)))) &
(3.i)R(h(c,c,c),h(c,c,h(c,c,c))) & (3.ii) (¬ R(c,c) v ¬ R(c,

Der Widerspruch ergibt sich diesmal wie folgt: (1.i) und (2.ii) er die Inferenz von ¬ R(h(c,c,c),h(c,c,h(c,c,c)), d.h. von der Negation Konjunkts (3.i).

Als nächstes und letztes Beispiel betrachten wir ein Argument, intuitiv nur wenig komplizierter ist als (308). Auch diesmal gel ein Argument, das uns aus dem Abschnitt über Ordnungs-bezi in Teil I schon bekannt ist. Dort sahen wir, daß die "Dichtheits-Bedingung"

(312) $(\forall x)(\forall y)(x < y \rightarrow (\exists z)(x < z \ \& \ z < y))$

in starken Ordnungsbeziehungen zu einer unendlichen Anzahl Elementen führt, sobald es zwei Elemente a und b gibt, die in de Ordnungsbeziehung < zueinander stehen. Die Überlegung ist be wenn a < b, dann gibt es nach (312) ein Element c, so daß a < c u Wenden wir (312) auf a und c an, dann ergibt sich ein Element a < d und d < c. Anwendung von (312) auf a und d ergibt ein e zwischen a und d, usw. Diese Überlegung zeigt auch, daß das A (313) gültig sein muß:

(313) $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \rightarrow (\exists z)(R(x,z) \ \& \ R(z,y))) \vdash$
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \rightarrow (\exists u)(\exists v)(R(x,u) \ \& \ R(u,v) \ \& \ R(u,y)))$

Auch aus der Konjunktion von der Prämisse und der Negation d Schlußes von (313) lassen sich unterschiedliche Pränex-Normal und daraus wiederum unterschiedliche Skolem-Formen ableiten. geben drei dieser Pränexformeln in (314.a) - (316.a) und für je entsprechende Skolemformel in (314.b) - (316.b).

(314) (a) $(\exists s)(\exists t)(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\forall v)$
$((\neg R(x,y) \vee R(x,z)) \ \& \ (\neg R(x,y)) \vee R(z,y)) \ \& \ R(s,t) \ \&$
$(\neg R(s,u) \vee \neg R(u,v) \vee \neg R(v,t)))$

(b) $((\neg R(x,y) \vee R(x,f(x,y))) \ \& \ (\neg R(x,y)) \vee R(f(x,y),y)) \ \& \ R(c,d)$
$(\neg R(c,u) \vee \neg R(u,v) \vee \neg R(v,d)))$

(315) (a) $(\forall x)(\forall y)(\exists s)(\exists t)(\exists z)(\forall u)(\forall v)$
$((\neg R(x,y) \vee R(x,z)) \ \& \ (\neg R(x,y)) \vee R(z,y)) \ \& \ R(s,t) \ \&$
$(\neg R(s,u) \vee \neg R(u,v) \vee \neg R(v,t)))$

(b) $((\neg R(x,y) \vee R(x,f(x,y))) \ \& \ (\neg R(x,y)) \vee R(f(x,y),y)) \ \&$
$R(g(x,y),h(x,y)) \ \& \ (\neg R(g(x,y),u) \vee \neg R(u,v) \vee \neg R(v,h(x,y)$

(316) (a) $(\forall x)(\forall y)(\exists s)(\exists t)(\forall u)(\forall v)(\exists z)$
$((\neg R(x,y) \vee R(x,z)) \,\&\, (\neg R(x,y)) \vee R(z,y)) \,\&\, R(s,t) \,\&$
$(\neg R(s,u) \vee \neg R(u,v) \vee \neg R(v,t)))$

(b) $((\neg R(x,y) \vee R(x,f(x,y,u,v))) \,\&\, (\neg R(x,y)) \vee R(f(x,y),y)) \,\&$
$R(g(x,y),h(x,y)) \,\&\, (\neg R(g(x,y),u) \vee \neg R(u,v) \vee \neg R(v,h(x,y)$

Der Beweis, daß (314.b) widersprüchlich ist, erfordert zwei Instanziierungen. Die Substitutionen und die Konjunktion der Instanziierungen findet man in (317.a,b):

(317) (a) (1) x:= c; y:= d; u:= f(c,d); v:= f(f(c,d),d)

(2) x:= f(c,d); y:= d; u:= c; v:= c

(In (2) sind die Substitutionen für u und v beliebi

(b) (1.i) $((\neg R(c,d) \vee R(c,f(c,d))) \,\&$
(1.ii) $(\neg R(c,d)) \vee R(f(c,d),d)) \,\&$ (1.iii) $R(c,d) \,\&$
(1.iv) $(\neg R(c,f(c,d)) \vee \neg R(f(c,d), f(f(c,d),d)) \vee$
$\neg R(f(f(c,d),d)),d)))$ &
(2.i) $((\neg R(f(c,d),d) \vee R(f(c,d),f(f(c,d),d))) \,\&$
(2.ii) $(\neg R(f(c,d),d)) \vee R(f(f(c,d),d),d)) \,\&$ (2.iii) $R(c,d$
(2.iv) $(\neg R(c,f(c,d)) \vee \neg R(c,c) \vee \neg Rc,c))$

Der Widerspruch ergibt sich dann wie folgt: Aus (1.i) und (1.iii) R(c,f(c,d)). Ebenso folgt aus (1.iii) und (1.ii) R(f(c,d),d). Aus R(c,f zusammen mit (1.iv) folgt $\neg R(f(c,d), f(f(c,d),d)) \vee \neg R(f(f(c,d),d)),$ Andererseits folgt aus R(c,f(c,d)) zusammen mit (2.ii) die Formel R(f(f(c,d),d),d), und diese gibt zusammen mit der gerade abgele Disjunktion $\neg R(f(c,d), f(f(c,d),d)) \vee \neg R(f(f(c,d),d)),d)$ die Formel $\neg R(f(c,d), f(f(c,d),d))$. Aus R(f(c,d),d) und (2.i) folgt aber die For R(f(c,d),f(f(c,d),d)), also die Negation der zuletzt erwähnten Forn

Legen wir unserem Widerspruchsbeweis nicht (314.b) sondern zugrunde, so begegnen wir einer zusätzlichen Schwierigkeit. Die besteht darin, daß (298.b) keine Individuenkonstante enthält. müssen deshalb, genau wie in einem Semantischen Tableau, in links nur Formeln gibt, die mit einem All-Quantor, und rechts n Formeln, die mit einem Existenzquantor beginnen, zuerst einen gewählten "Parameter" einführen; sonst ist es nicht möglich, ein quantorenfreie Instanziierung unserer Skolem-Form abzuleiten, das Resoltionsverfahren angewendet werden kann. Wählen wir Parameter die Individuenkonstante c und substituieren wir die gleich für alle all-quantifizierten Variablen x, y, u, v, so ergibt si Konjunktion

(318) ((¬ R(c,c) v R(c,f(c,c))) & (¬ R(c,c)) v R(f(c,c),c)) &
R(g(c.c),h(c,c)) & (¬ R(g(c,c),c) v ¬ R(c,c) v ¬ R(c,h(c,c))))

Als drittes Konjunkt enthält (318) das Literal R(g(c.c),h(c,c)). Di jetzt bei der Ableitung des Widerspruchs dieselbe Rolle spielen R(c,d) in der Widerspruchsableitung aus (314.b). Mit anderen V die Substitutionen vonn (317.a) müssen entsprechend, wie in ("hochgerüstet" werden:

(319) (a)(1) x:= c; y:= c; u:= c; v:= c
(2) x:= g(c,c); y:= h(c,c); u:= f(g(c,c),h(c,c));
v:= f(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c))
(3) x:= f(g(c,c),h(c,c)); y:= h(c,c); u:= c; v:= c
(In (3) sind die Substitutionen für u und v beliebi

(b)(1.i) ((¬ R(c,c) v R(c,f(c,c))) &
(1.ii) (¬ R(c,c)) v R(f(c,c),c)) & (1.iii) R(g(c,c),h(c,c)) &
(1.iv) (¬ R(g(c,c),c) v ¬ R(c,c) v ¬ R(c,h(c,c)))) &

(2.i) ((¬ R(g(c,c),h(c,c)) v R(g(c,c),f(g(c,c),h(c,c))) &
(2.ii) (¬ R(g(c,c),h(c,c))) v R(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c))) &
(2.iii) R(g(g(c,c),h(c,c))),h(g(c,c),h(c,c)))) &
(2.iv) (¬ R(g(g(c,c),h(c,c)),f(g(c,c),h(c,c))) v
¬ R(f(g(c,c),h(c,c)), f(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c))) v
¬ R(f(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c)),h(g(c,c),h(c,c))))) &

(3.i) ((¬ R(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c)) v
R(f(g(c,c),h(c,c)),f(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c)))) &
(3.ii) (¬ R(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c)) v
R(f(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c))),h(c,c))) &
(3.iii) R(g(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c)),h(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c))
(3.iv) (¬ R(g(f(g(c,c),h(c,c),c) v ¬ R(c,c) v
¬ R(c,h(f(g(c,c),h(c,c)),h(c,c))))

Die Ableitung des Widerspruchs erfolgt nun wie im letzten Fall. involviert direkt nur die Konjunkte, die von der zweiten und d Substitution herrühren. Wir ersparen dem Leser die explizite Beschreibung. Auch überlassen wir dem Leser die Ableitung eir Widerspruchs aus (316.b).

4.3.1.2 Resolution für Prädikatenlogik mit Identität

Für die Prädikatenlogik mit Identität (bzw Identität und Funkt konstanten) reicht die eine Regel (304) des Resolutionsverfahre aus. Wir brauchen hier Gegenstücke zu den Identitätsregeln, di den Beweisverfahren nötig waren, die in den vorigen Kapiteln wurden. Das nächste Beispiel zeigt die Unentbehrlichkeit einer die der Tableauregel (=,Subs) entspricht

(320) $(\forall x)(\forall y)(R(f(x), g(y)) \rightarrow \neg R(g(y), f(x))),$
$(\forall x)(\exists y)\ x = f(y), (\forall x)(\exists y)\ x = g(y)$
$\vdash \neg(\exists x)\ R(x,x)$

Schauen wir uns zuerst das Semantische Tableau für (320) an:

(321)

WAHR	FALSCH
$(\forall x)(\forall y)(R(f(x), g(y)) \rightarrow \neg R(g(y), f(x)))$	$\neg(\exists x)\ R(x,x)$
$(\forall x)(\exists y)\ x = f(y)$	
$(\forall x)(\exists y)\ x = g(y)$	
$(\exists x)\ R(x,x)$	
$R(a,a)$	
$(\exists y)\ a = f(y)$	
$a = f(b)$	
$(\exists y)\ a = g(y)$	
$a = g(c)$	
$(\forall y)(R(f(b), g(y)) \rightarrow \neg R(g(y), f(b)))$	
$R(f(b), g(c)) \rightarrow \neg R(g(c), f(b))$	

	$\neg R(g(c), f(b))$	$R(f(b), g(c))$	
			$R(g(c), f(b))$
		$R(a,a)$	$R(a,a)$

Der linke Ast von (321) kommt zum Abschluß, indem man die F "R(f(b), g(c))" durch zweimalige Anwendung von (=.Subst) in "R(a transformiert. (Einmal wird die Gleichung "a = f(b)" und einmal Gleichung "a = g(c)" verwendet. Der rechte Ast wird auf ähnliche zum Abschluß gebracht.) Ein solches Substitutionsverfahren, be eine Gleichung "s = t" es erlaubt, in einer anderen Formel s durc t durch s zu ersetzen, brauchen wir beim Resolutionsverfahren Betrachten wir eine Skolem-Normalform von der Konjunktion vo Prämissen und Negation des Schlusses von (320). Wir gehen vo Pränex-Normalform (322) aus und leiten daraus die Skolemforn ab:

(322) $(\exists t)(\forall u)(\exists v)(\forall w)(\exists z)(\forall x)(\forall y)$
$((\neg R(f(x), g(y)) \vee \neg R(g(y), f(x))) \ \& \ u = f(v) \ \& \ w = g(z) \ \& \ R($

(333) $(\forall u)(\forall w)(\forall x)(\forall y)((\neg R(f(x), g(y)) \vee \neg R(g(y), f(x))) \ \& \ u = f(h$
$w = g(k(u,w)) \ \& \ R(a,a))$

(In (333) wurde t durch die Konstante a, v durch den Term h(u durch den Term k(u,w) ersetzt.)

Um die Gültigkeit von (i) durch Resolution zu zeigen, brauchen w nur eine Substitution - und zwar folgende:

(i) u:= a; w:= a; x:= h(a); y:= k(a.a)

für die All-Quantoren von (333):

(334) $(\neg R(f(h(a)), g(k(a.a))) \vee \neg R(g(k(a.a)), f(h(a)))) \ \& \ a = f(h($
$a = g(k(a,a)) \ \& \ R(a,a))$

Aber weder diese Substitution noch auch weitere Substitutionen All-Quantoren von (333) führen zu einem Abchluß, wenn wir ni zusätzlich von einer geeigneten Identitätsregel Gebracuh machen benötigen eine Regel, die es analog zu der Anwendung von (=,Su Tableau (321) erlaubt, die Terme f(h(a)) und g(k(a,a)) durch a ersetzen. Durch diese Ersetzungen entsteht aus dem ersten Ko von (334) die Formel "$(\neg R(a,a) \vee \neg R((a.a))$". Fügen wir diese als zusätzliches Konjunkt hinzu, so bekommen wir (335), und aus Anwendung der Resolutionsmethode auf die letzten zwei Konjun (335) ergibt sich der Widerspruch dann direkt und mühelos.

(335) (¬ R(f(h(a)), g(k(a.a))) v ¬ R(g(k(a.a)), f(h(a)))) & a = f(h(
a = g(k(a,a)) & R(a,a)) & (¬ R(a,a) v ¬ R((a.a)))

Damit solche Ersetzungen erlaubt sind, müssen die verwendete
Gleichungen aus der gegebenen Konjunktion logisch folgen. Das
daß diee Gleichungen als eigenständige Konjukte in der Konjunk
vorkommen müssen (und nicht etwa als Disjunkt eines Konjunk
in dem Fall würde die Gleichung ja nicht unbedingt ein logische
Konsequenz der geasmten konjuntion sein). Im obigen Beispiel
Bedingung in der Tat erfüllt, da "a = f(h(a))" und "a = g(k(a,a))"
Konjunkte von (334) sind.

Wir kommen damit zu der folgenden zusätzlichen Regel für das
resolutionsverfahren

(336) (Identitätssubstitutionssregel für Resolution)

Sei A eine variablenfreie Formel in konjunktiver Normalforn
die Gleichung "s = t" eines ihrer Konjunkte, sei B ein beliebig
Konjunkt von A und sei B' eine Formel, die sich aus B ergibt
ein oder mehrere Vorkommen von s durch t, und/oder ein
mehrere Vorkommen von t durch s ersetzt werden. Dann
Konjunktion A um das Konjunkt B' erweitert werden.

Wie in allen bisher betrachteten Beweisverfahren brauchen wir
beim Resolutionsvrfahren eine Regel, die die logische Gültigkeit
Gleichungen der Form "t = t" widerspiegelt. Dass wir auch hier
solche Regel nicht herumkommen, sei am Beispiel (337) gezeigt.

(337) ⊢ (∀x) x = x

(338) ist die Skolemform für das Argument (337):

(338) ¬ a = a

Die Resolutionsregel ist auf (338) offensichtlich nicht anwendba
dasselbe gilt für unsere neue Regel (336). Was wir brauchen, is
Regel, die erlaubt, beliebige variablenfreie Gleichungen "t = t" al
Konjunkte hinzuzufügen. (Diese Regel entspricht dem semantis
Prinzip, daß jede solche Gleichung in allen Modellen wahr ist. D
wird ihre Hinzufügung den logischen Gehalt der Konjunktion ni
affizieren, und insbesondere kann eine widerspruchsfreie Konj
auf diese Weise nicht widersprüchlich werden.)

Die Regel ist in (339) nochmals formuliert:

(339) Sei A eine variablenfreie Formel in konjunktiver Normal: und “t = t“ eine beliebige variablenfreie Gleichung. Dann Konjunktion A um das Konjunkt “t = t" erweitrt werden.

Damit ist die formale Diskussion der Resolutionsmethohde abgeschlossen.

4.3.1.3 Allgemeine Bemerkungen zur Resolutionsmetho

Aus der Diskussion der meisten Beispiele der letzten beiden Ab wird der Leser leicht den Eindruck gewonnen haben, daß die Resolutionsmethode nicht unbedingt benutzerfreundlich ist. Di aber eher auf den menschlichen als den "maschinellen" Benutzer Rechner kommt mit solchen "Komplexitäten" wie mehrfach verschachtelten Termen, in denen 1- oder mehr- stellige Funkt Argumente von anderen Funktorvorkommen auftreten, leichter als der durchschnittliche Homo Sapiens. Der Rechner "denkt ja benimmt sich vielmehr wie ein philosophischer Kollege mir geg einmal den formalen Logiker charakterisierte: "Er rechnet nur". können Rechner aber erstaunlich gut. Wenn es darum geht, Te Variable zu substituieren, die in anderen Termen vorkommen, festzustellen, daß die Substitution bestimmter Terme zu identis Formeln führt, sind Rechner unschlagbar. Deshalb hat sich das Resolutionsverfahren in der Entwicklung von automatischen Theorembeweisern - d.h. von Programmen, die (prädikatenlogis Beweise durchführen - denn auch sehr bewährt. Zur Zeit sind den Theorembeweisverfahren, die direkt auf der Tableaumeth basieren, resolutionsbasierte Theorembeweiser die erfolgreichs

Die meisten Schritte, die die Resolutionsmethode erfordert - Konstruktion der konjunktiven Pränex-Normalform und der Sk Normalform, sowie die Anwendung des Resolutionsverfahrens a Konjunktion der Instanziierungen der Skolem-Normalform - sin (vergleichsweise einfache) Entscheidungsverfahren, die immer einer voraussagbaren Anzahl von Operationsschritten zum inte Zielergebnis führen. Den Engpass des Verfahrens bilden die Substitutionen für die all-qunatifizierten Variablen der Skolem Welche Substitutionen für die Aufdeckung eines Widerspruchs erforderlich sind, und wieviele, ist eine Frage, auf die es keine berechenbare Anwort gibt. Das fehlen einer solchen Antwort is

Grund, wieso das Resolutionsverfahren - genauso wie alle ande
Beweismethoden für die Prädikatenlogik - nicht ein
Entscheidungsverfahren ist.

Wir fassen die Situation noch einmal kurz zusammen. Haben w
geschickte Wahl von Substitutionen einer gegebenen Skolemforr
expliziten Widerspruch erreicht, dann ist selbstverständlich da
Widersprüchlichkeit der Skolemform (und damit die Gültigkeit
ursprünglichen Arguments) bewiesen. Überdies ist die
Resolutionsmethode ebenso wie die in den vorigen Abschnitten
diskutierten Verfahren vollständig: Ist eine Skolemform
widersprüchlich (= in keinem Modell erfüllbar), so kann dies im
durch geschickte Substitutionen und Anwendung von Resolution
so entstandene quantorenfreie Konjunktion gezeigt werden. Ist
unbekannt, ob eine Skolemform widersprüchlich ist, so läßt sich
Frage ihrer Widersprüchlicgkeit nicht einfach dadurch entschei
man "genug" Substitutionen ausführt und das Resolutionsverfal
die Konjunktion anwendet, die sich daraus ergibt. Hat, nachden
Menge von Substitutionen durchgeführt und in die Gesamtkonj
aufgenommen worden sind, das Resolutionsverfahren immer no
zu einem Widerspruch geführt, so kann im Allgemeinfall daraus
die Widerspruchsfreiheit der Skolemform geschlossen werden,
ungeachtet wie groß diese Menge sein mag. Denn im Allgemeinf
nie ausgeschlossen werden, daß weitere Substitutionen nicht do
zu einem expliziten Widerspruch führen würden.

Daß die Frage der Substitutionswahl im Resolutionsverfahren ke
allgemeine Berechenbare Lösung zuläßt, läßt sich nicht ohne We
verifizieren. Das dem so sein muß, folgt aber aus dem schon fr
erwähnten Unvollständigkeitssatz von Gödel, nach dem es kein
Entscheidungsverfahren für die Gültigkeit prädikatenlogischer
Argumente geben kann. Wäre vorneweg bekannt, welche oder
Substitutionen bei der Anwendung des Resolutionsverfahrens a
gegebene Skolemform notwendig wären, um seine eventuelle
Widersprüchlichkeit aufzudecken, dann wäre damit die gesamt
Resolutionsmethode ein Entscheidungsvefahren. Denn, wie wir
beobachtet haben, haben alle anderen Operationen, die bei
Anwendungen der Methode ins Spiel kommen, den Status von
Entscheidungsvefahren. Wäre die Menge der benötigten Substi
im Voraus abzuschätzen, dann hätten wir damit also einen Wic
zum Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Aus dem Unvollständig
folgt somit umgekehrt, daß eine explizite Abschätzung der ben
Substitutionen nicht möglich ist.