# Skript Proseminar Mathematische Methoden. Wintersemester 1998/99

## IMS. Universität Stuttgart.

Inhaltsverzeichnis.

## 1. Der Aussagenkalkül und das Vier-Karten-Experiment von Wason.[1]

Das von dem britischen Psychologen Peter Wason in den sechziger Jahren entworfene Vier-Karten-Experiment läßt sich wie folgt beschreiben:

Vor Dir liegen vier Karten auf dem Tisch, die ersten zwei mit der Vorderseite und die letzten zwei mit der Rückseite nach oben. Was man sieht, ist folgendes:

(1) A D 7 10

Dir wird gesagt, daß jede dieser vier Karten alle die folgende allgemeine Hypothese H bestätigt:

(H): Wenn auf der Vorderseite einer Karte ein Vokal steht, dann steht auf ihrer Rückseite eine gerade Zahl.

Aufgabe: Genau welche von den vier Karten sind umzudrehen, um festzustellen, ob H für diese Karten stimmt?

Dieses Experiment ist aus psychologischer Sicht deshalb interessant, weil die große Mehrzahl der Befragtren eine falsche Antwort gibt.[2] Die richtige Antwort:

---

[1] Z.B. Wason, P. C. Reasoning. In D. Foss (Her.) New horizons in Psychology. Penguin, 1966; oder Johnson-Laird, P.N. and P.C. Wason. A theoretical Analysis of insight into a reasoning Task. Cognitive Psychology 1, 1970. (Exzerpiert in: Johnson-Laird, P.N. and P.C. Wason, *Thinking*. Cambridge University Press, 1977.

[2] Das psychologische Interesse an diesem Experiment, das im Laufe der letzten dreißig Jahre in unzähligen Varianten wiederholt wurde, erklärt sich aus der erstaunlich niedrigen Quote derjenigen, die die Frage richtig beantworten. Johnson-laird und Wason (1970) berichten von einem frühen Versuch, bei dem von 128 Versuchspersonen lediglich 5 die korrekte Antwort gaben. 59 Versuchspersonen sagten, man sollte die Karten 1 und 4 umdrehen, 42 meinten, man könne sich auf das Umdrehen von der Karte 1 beschränken, 9 waren für das Umdrehen von Karten 1, 3 und 4 und die restlichen 13 warteten mit noch anderen, nicht weiter spezifizierten Antworten auf. Sogar viele professionelle Logiker versagten (und waren dann meistens ziemlich sauer, als sie sich ihre Fehler von einem Psychologen erklären lassen mußten).
Ein frappantes Ergebnis späterer Varianten des Experiments ist, daß die Performanz sich dramatisch verbessert, wenn man den Versuchspersonen das Problem in einer Version anbietet, die einen direkten Bezug zu ihren praktischen

Umzudrehen sind die erste Karte - denn sollte auf ihrer Rückseite keine gerade Zahl stehen, so wäre H damit falsifiziert - und die dritte - denn sollte auf ihrer Vorderseite ein Vokal stehen, so würde sie H falsifizieren. Umdrehen der beiden anderen Karten bringt nichts. Auf der Vorderseite der zweiten Karte steht ein Konsonant. Also ist diese Karte für die Hypothese irrelevant: ungeachtet, ob auf ihrer Rückseite ein gerade oder ungerade Zahl steht, kann sie H nicht wiederlegen. Ebenso die vierte Karte; da auf ihrer Rückseite eine gerade Zahl steht, ist irrelevant, ob vorne ein Vokal oder ein konsonant steht.

Wir wollen die hier beschriebene Aufgabe mit logischen Mitteln etwas genauer analysieren. Dazu benutzen wir zuerst den sogenannten *Aussagenkalkül.*

Wir stellen die Sätze "Auf der Vorderseite der ersten Karte steht ein Vokal.", "Auf der Rückseite der ersten Karte steht eine gerade Zahl.", usw. wie folgt schematisch dar:

(2):

$p_1$: Auf der Vorderseite der ersten Karte steht ein Vokal.
$q_1$: Auf der Rückseite der ersten Karte steht eine gerade Zahl.
$p_2$: Auf der Vorderseite der zweiten Karte steht ein Vokal.
$q_2$: Auf der Rückseite der zweiten Karte steht eine gerade Zahl.
$p_3$: Auf der Vorderseite der dritten Karte steht ein Vokal.
$q_3$: Auf der Rückseite der dritten Karte steht eine gerade Zahl.
$p_4$: Auf der Vorderseite der vierten Karte steht ein Vokal.
$q_4$: Auf der Rückseite der vierten Karte steht eine gerade Zahl.

Indem wir "wenn ... , dann" durch den Pfeil $\rightarrow$ und die Konjunktion "und" durch das Zeichen & darstellen, können wir die Hypothese H jetzt wie folgt symbolisieren:

(H') $(p_1 \rightarrow q_1)$ & $(p_2 \rightarrow q_2)$ & $(p_3 \rightarrow q_3)$ & $(p_4 \rightarrow q_4)$

---

Tätigkeiten hat. So wurde z.B. englischen Kassiererinnen (in England bezahlen Kunden oft mit Schecks) die Aufgabe in folgender Gestalt vorgelegt: Hier sind vier Schecks aus einem Geschäft, in dem Schecks von über £ 50,- vom Manager kontrolliert und auf der Rückseite gegengezeichnet werden müssen: (i) Vorderseite sichtbar, Betrag £ 37, 60; (ii) Vorderseite sichtbar, Betrag £ 74, 45; (iii) Rückseite sichtbar, vom Manager gegengezeichnet; (iv) Rückseite sichtbar, nicht vom Manager gegengezeichnet. H: Wenn ein Scheck zu mehr als fünfzig Pfund ausgestellt ist, dann ist er auf der Rückseite vom Manager gegengezeichnet. Die Mehrheit der Kassiererinnen gaben in diesem Fall die richtige Antwort.

Der *Aussagenkalkül*, dem die in (H') verwendeten Symbole angehören umfaßt noch weitere Symbole. Formal läßt er sich wie folgt charkterisieren:[3]

Aussagenkalkül:

Symbole:
1. Aussagenkonstanten: $p$, $q$, $r$, ..., $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... , $q_1$, $q_2$, …
2. Junktoren: $\neg$, &, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
3. Klammern: (, ).

Formeln:
1. jede Aussagenkonstante ist eine *Formel*.
2. wenn A und B Formeln sind, so sind auch $\neg A$, (A & B), (A v B), (A $\rightarrow$ B), und (A $\leftrightarrow$ B) *Formeln*.

N. B. Nach der gerade gegebenen Definition ist (H') genau gesprochen keine Formel. Wir können sie in eine der Definition entsprechende Formel verwandeln, indem wir die Konjunkte binär verschachteln, wie etwa in (3):

(3) $((((p_1 \rightarrow q_1) \mathbin{\&} (p_2 \rightarrow q_2)) \mathbin{\&} (p_3 \rightarrow q_3)) \mathbin{\&} (p_4 \rightarrow q_4))$

Da aber diese zusätzliche Verschachtelung, wie wir bald sehen werden, für die Bedeutung der Formel keine Rolle spielt - alle möglichen "offiziellen" Formeln, die man durch Hinzufügung von Klammern aus der "Quasi-Formel" (H') bilden kann, sind miteinander äquivalent - werden wir uns in der Praxis oft erlauben, solche"Quasi-Formeln" als Vereinfachungen der entsprechenden offiziellen Formeln hinzuschreiben.

Die in (1) gezeigte Situation kann mit Hilfe des Abkürzungsschemas (2) im Aussagenkalkül mit der Formel (4) beschrieben werden:

(4) $(((p_1 \mathbin{\&} \neg p_2) \mathbin{\&} \neg q_3) \mathbin{\&} q_4)$

oder, unter Weglassung der verzichtbaren Klammern, mit der "Formel"

---

[3] In der Literatur gibt es mehrere formal veschiedene Defintionen des Aussagenkalküls. Die Altenativen unterscheiden sich aber nicht wesentlich von der hier gegebenen Version.

(4') $p_1 \,\&\, \neg\, p_2 \,\&\, \neg\, q_3 \,\&\, q_4$

Die Lösung des Vier-Karten-Problems - es sind die erste und die dritte Karte umzudrehen - kann nun folgenderweise begründet werden. (4') beschreibt die uns aufgrund der sichtbaren Kartenseiten verfügbare Information. Damit die Hypothese (H') für jede der betreffenden Karten stimmt, darf keines der entsprechenden Konjunkte von (H') falsch sein. Das erste Konjunkt $p_1 \rightarrow q_1$ hat nach (4') ein wahres Antezedens, würde also falsch sein, wenn sein Konsequens falsch wäre. Um dies festzustellen, ist es nötig, die erste Karte umzudrehen. Ebenfalls wäre das dritte Konjunkt mit seinem, wie (4') zeigt, falschen Konsequens falsch, falls sein Antezedens wahr sein sollte. Auch diese Karte ist deshalb umzudrehen. Dagegen könnte sich das zweite Konjunkt mit seinem (4') zufolge falschen Antezedens nie als Gegenbeispiel herausstellen, ungeachtet, ob sein Konsequens sich als wahr oder falsch herausstellt. Ähnliches gilt für das vierte Konjunkt mit seinem wahren Konsequens.

Eine formale Begründung dieser Überlegungen sezt eine explizite Bedeutungsdefinition der relevanten Junktoren & und $\rightarrow$ voraus. Das heißt: wir müssen explizieren, wie das wahr oder falsch sein einer Formel A & B bzw. A $\rightarrow$ B durch die Bedeutungen von A und B betimmt ist. Für & ist dies unproblematisch. Eine Konjunktion A & B ist wahr, wenn A und B beide wahr sind und falsch, sobald mindestens eines seiner Konjunkte falsch ist. Schematisch läßt sich diese Information wie folgt darstellen:

<u>Wahrheitstafel von &</u>

| A | B | A & B |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

Die Konsequenzen dieser Charakterisierung von & für Konjunktionen von mehr als zwei Gliedern sind offensichtlich. Betrachten wir den Fall einer Konjunktion von drei Konjunkten, A, B und C. Wie schon bemerkt, ist

(5) A & B & C

strikt gesprochen keine Formel, aber sie kann auf zwei Weisen zu einer "offiziellen" Formel ergänzt werden, und zwar als

(5') ((A & B) & C ) und als
(5'') (A & (B & C))

In beiden Fällen führt die iterierte Anwendung der Wahrheitstafel für & zu dem Schluß, daß A & B & C genau dann wahr ist, wenn alle drei Konjunkte A, B und C wahr sind. Das gleiche gilt für Konjunktionen von vier oder mehr Konjunkten.

Die Wahrheitstafel für & kann als Muster für die Bestimmung der Semantik aller Junktoren des klassischen Aussagenlkalküls betrachtet werden; auch die anderen Junktoren des Kalküls sind rein *wahrheitsfunktional*, in dem Sinne, daß der Wahrheitswert einer mit ihrer Hilfe gebildeten komplexen Formel ausschließlich von den Wahrheitswerten ihrer Komponenten abhängt.

Einen zweiten verhältnismaßig unproblematischen Fall bildet die Negation: ¬ A ist wahr, wenn A falsch ist und falsch, wenn A wahr ist. Die Wahrheitstafel für die negation sieht damit wie folgt aus:

<u>Wahrheitstafel von ¬</u>

| A | ¬A |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

Für die noch verbleibenden Junktoren ist diese Prozedur- ihre Semantik mittels einer Wahrheitstfel zu charakterisieren - weniger selbstverständlich. Nehmen wir zuerst die Implikation, deren Semantik wir für die Begründung des Vier-Karten-Problems brauchen. Wann ist ein Konditional A → B wahr und wann ist es falsch? Eine Teil der Antwort ist leicht gegeben: A → B kann nicht wahr sein, wenn A wahr ist und B falsch. (Dies begründet die eine Hälfte der Lösung des Vier-Karten-Problems: gerade weil A → B falsch ist, wenn B falsch ist und A wahr, müssen die erste und die dritte Karte umgedreht werden; denn im ersten Fall könnte sich herausstellen, das Konsequens als falsch, und im zweiten Fall, daß das Antezedens wahr ist.

Aber was íst zu den restlichen Fällen zu sagen? Hier ist die Antwort weniger offensichtlich. Zwar sind, wie die Beobachtungen zum Wasonschen Experiment zeigten, auch in diesen Fällen die möglichen Antworten durch unser intuitives Verständnis der Konditionalkonstruktion (also: des "wenn,...dann") eingeschränkt, aber die im Aussagekalkül angenommenen Antworten lassen sich dadurch nur zum Teil rechtfertigen. In unserer Analyse des Experiments bezeichneten wir den Fall, in dem das Antezedens eines Konditionals falsch ist, als irrelevant, da ein solches Konditional weder mit wahrem noch mit falschem Konsequenz falsch sein könnte. Ebenso war der Fall eines Konditionals mit wahrem Konsequens ignoriert werden, da ein solches Konditional nicht falsch sein kann, ungeachtet dessen, ob sein Antezedens wahr oder falsch ist. Wenn wir nun aus dem nicht -Falsch-Sein einer Aussage schließen können, daß sie wahr sein muß, so steht damit die Wahrheitstafel für das Konditional fest: $A \rightarrow B$ ist falsch, wenn A wahr ist und B falsch, und $A \rightarrow B$ ist wahr, wenn entweder A falsch oder B wahr ist. Damit sind alle möglichen Fälle abgedeckt und die Wahrheitstafel sieht wie folgt aus.

<u>Wahrheitstafel von $\rightarrow$</u>

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Der so definierte Konditionaljunktor ist unter dem Namen von *materieller Implikation* bekannt. Aus linguistisch-philosophischer Sicht ist sie umstritten und zwar aus mehreren Gründen. Zuerst ist die soeben benutzte Inferenz, daß eine Aussage, die nicht falsch ist, wahr sein muß, keineswegs selbstverständlich. Muß z.B. ein Konditional mit falschem Antezedens unbedingt wahr sein?. Vielleicht ist es weder falsch noch wahr. Unser intuitives Verständnis von der Bedeutung von Konditionalkonstruktionen (wie dem deutschen "wenn, ...dann") scheint diese Möglichkeit nicht auszuschließen. Die Tatsache, daß eine Formel
$A \rightarrow B$ mit falschem A im Aussagenkalkül als wahr gilt, muß deshalb als eine Entscheidung über die Bedeutung des Junktors $\rightarrow$ gesehen werden, die nur zum Teil in unserer semantischen Intuition begründet ist. Dasselbe gilt für das Prinzip der *Bivalenz*, nach dem jede Aussage entweder wahr oder falsch (aber nicht beides zugleich) ist. Auch dieses

Prinzip, das wir benutzten, um die nicht direkt einsichtigen Komponenten der Wahrheitstafel für $\rightarrow$ abzuleiten, und das in der gesamten klassischen Logik einen zentralen Platz einnimmt, ist alles andere als eine Selbstverständlichkeit.[4]

Der Doppelpfeil $\leftrightarrow$ ist, wie die Notation nahelegt, als "Bikonditional" zu verstehen, d.h. $A \leftrightarrow B$ können wir als Konjunktion von den Konditionalen $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ verstehen. Damit ergibt sich aus den Wahrheitstafeln für $\rightarrow$ und & als Wahrheitstafel für $\leftrightarrow$:

<u>Wahrheitstafel für $\leftrightarrow$</u>

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|

[4] Für die Konditionale gibt es noch ein zusätzliches Problem. Nach unserem intuitiven Verständnis ist es alles andere als klar, daß Koditionale mit falschem Antezedenz nie falsch sind. Zum Beispiel halten viele ein Konditional wie

> Wenn Stuttgart über eine Million Einwohner hat, dann mündet der Nil im Roten Meer.,

von dem klar ist, daß Antezedenz und Konzequenz beide falsch sind, dennoch für falsch, weil zwischen Antezedenz und Konsequenz kein kausaler Zusammenhang besteht. Die Tendenz, solche Konditionale als falsch zu betrachten, ist besonders stark, wenn wenn-Satz und Hauptsatz im Konjunktiv stehen, wie in

> Wenn Stuttgart über eine Million Einwohner hätte, dann würde der Nil im Roten Meer münden.

Ein solches Konditional scheint von alternativen nicht realsierten Möglichkeiten (oder "möglichen Welten" zu reden, in denen Stuttgart ungefähr zwei mal so groß ist wie hier und jetzt, und von diesen Möglichkeiten auszusagen, daß in ihnen der Nil im Roten Meer mündet. Da die Mündung des Nils nichts mit der Einwohnerzahl von Stuttgart z tun haben scheint, erscheint uns diese Aussage über die möglichen Welten, in denen Stuttgart mehr als eine Million Einwohner hat, einfach falsch.

Nach dieser Intuition wird die Wahrheit eines Konditionals nicht so sehr von den Wahrheitswerten von Antezedenz und Konsequenz, sondern vielmehr von der inhaltlichen Beziehung zwischen diesen beiden bestimmt. Damit ist aber die Bedeutung der Konditionalverknüpfung nicht länger mittels einer Wahrheitstafel festzulegen und sind die Konditionale der Umgagssprache also noch weiter von der Semantik des Junktors $\rightarrow$ entfernt, als im Text suggeriert wurde. Über die nicht wahrheitsfunktionale Aspekte der Semantik von Konditionalen gibt es eine umfangreiche Literatur

| | | |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

Schließlich die Disjunktion v. Für drei von den vier Reihen der Wahrheitstafel ist der Eintrag unproblematisch: A v B ist wahr, wenn das erste der beiden Disjunkte A und B wahr ist und das zweite falsch; es ist ebenfalls wahr, wenn das zweite Disjunkt wahr ist und das erste falsch; und es ist unwahr, wenn beide Disjunkte falsch sind. Kontrovers ist nur der Fall, wenn A und B beide wahr sind. Oft besteht der Eindruck, daß die Disjunktion für diesen Fall "nicht intendiert" sei und es wird dann daraus geschlossen, die Disjunktion sollte in dieser Situation als falsch betrachtet werden. Diese Überlegung ist insofern nicht sehr überzeugend, als bei Disjunktionen, deren Disjunkte sich gegenseitig ausschließen, der entscheidende Fall, in dem A und B zugleich wahr sind, gar nicht erst auftritt. Solche Disjunktionen sind also bezüglich der Frage, ob eine Disjunktion mit zwei wahren Disjunkten wahr oder falsch ist, neutral. Andererseits gibt es Verwendungen von "oder", bei denen das Wahrsein beider Disjunkte wohl nicht als Grund für das Falschsein der Disjunktion zu sehen ist. Typische Beispiele sind gesetzliche Verordnungen mit disjunktiven Antezedenten, nach dem Muster:

(6) Wenn Sie mehr als $5000, - an Bargeld bei sich haben oder im Ausland erstandene Gegenstände einführen, deren Gesamtwert § 1000, - übersteigt, müssen Sie den rechten, mit Rot markierten Zollausgang wählen.

Einer, der mehr als §5000, - bei sich hat, und auf der Reise mehr als $1000, - an jetzt einzuführenden Gegenständen erworben hat, dennoch aber den linken Ausgang wählt, könnte sich bei einer Überprüfung wohl kaum damit entschuldigen, daß die Instruktion (6) für den Fall, daß beide Disjunkte des Antezedens wahr sind, keine bindende Aussage macht, da aus einem Konditional mit falschem Antezedens nichts über das Konsequens folgt..

Damit ist die Frage, ob eine Disjunktion mit wahren Disjunkten allgemein als wahr oder als falsch zu definieren ist, aber immer noch nicht entgültigl entschieden. Denn es wäre ja möglich, daß Disjunktionen (genauer: Verwendungen des Wortes *oder*) zwischen einer *inklusiven* Interpretation, nach der eine Disjunktion mit zwei wahren Disjunkten wahr ist, und einer *exklusiven*, nach der eine solche

Disjunktion falsch ist, ambig sind; und rein auf Basis unseres intuitiven Verständnisses von *oder* läßt sich auch wohl nicht eindeutig klären, ob es diese Ambiguität gibt. Wir folgen hier der in der Logik üblichen Praxis, als Interpretation für den Disjunktionsjunktor v des Aussagenkalküls die *inklusive* Disjunktion zu wählen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich für v die folgende Wahrheitstafel:

<u>Wahrheitstafel für v</u>

| A | B | A v B |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

Die *exklusive* Disjunktion läßt sich mit Hilfe der inklusiven Disjunktion, Konjunktion und Negation "simulieren", zum Beispiel durch diese Formel: (A v B) & ¬(A & B).

Mit Hilfe der Wahrheitstafeln für die Junktoren können wir für willkürliche Formeln berechnen, wie ihr Wahrheitswert von den Wahrheitswerten ihrer minimalen Konstituenten (also: von den in ihnen enthaltenen Aussagenkonstanten) abhängt. Ein paar Beispiele werden das Verfahren illustrieren:

(7)

| p | q | (p & q) | → | ¬ p |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f |
| w | f | f | w | f |
| f | w | f | w | f |
| f | f | f | w | f |

Hier sind die Wahrheitswerte der komplexen Formel und ihrer Teilformeln jeweils unter den entsprechenden "äußeren" Junktoren eingetragen. (Die Wahrheitswerte unter → sind also die der gesamten Formel.)

(7) zeigt, daß die Formel (p & q) → ¬ p unter den meisten Kombinationen von Wahrheitswerten für p und q wahr ist. Es gibt nur eine Ausnahme: Wenn p und q beide wahr sind, ist die Formel falsch. Intuitiv leuchtet dies auch ein: (p & q) → ¬ p besagt, daß wenn p und q

beide wahr sind (oder wären), dann p falsch ist (wäre). Das widerspricht
der Wahrheit des Antezedens, also kann das Antezedens nicht wahr sein. Insgesamt besagt die Formel also genau, daß p und q nicht beide wahr sind.

Vergleichen wir (7) mit der Wahrheitstafel der Formel $(p \,\&\, q) \rightarrow p$:

(8)

| p | q | (p & q) | → p |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | f | f | w |
| f | w | f | w |
| f | f | f | w |

Hier haben wir eine Formel, die bei jeder möglichen Kombination von Wahrheitswerten ihrer Konstituenten wahr ist. Sie ist also notwendig wahr, und zwar aufgrund ihrer Form, also aus *logischen* Gründen. Solche Formeln heißen *Tautologien* oder auch *logische Identitäten.*

Es folgt eine Liste von bekannten Tautologien. (Die Liste ist zu einem erheblicehn Grade willkürlich und könnte leicht erweitert werden):

(9)
(i) $p \rightarrow p$
(ii) $p \rightarrow (p \vee q)$
(iii) $(p \,\&\, q) \rightarrow (q \,\&\, p)$
(iv) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
(v) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
(vi) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
(vii) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
(viii) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
(ix) $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$
(x) $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \,\&\, \neg q)$
(xi) $(p \,\&\, q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
(xii) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow p))$
(xiii) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \,\&\, q) \vee (\neg p \,\&\, \neg q))$
(xiv) $p \leftrightarrow \neg \neg p$
(xv) $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg (p \leftrightarrow q)$
(xvi) $p \vee \neg p$

(xvii) $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Je mehr Aussagenkonstanten in einer Formel vorkommen, um so größer ist die Anzahl der möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten und um so umständlicher wird die Konstruktion ihrer Wahrheitstafel. Z.B. gibt es mit drei Aussagenkonstanten schon $2^3 = 8$ solche Kombinationen. Als weitere Illustration der Konstruktion von Wahrheitstafeln geben wir die Wahhrheitstafel für (9.xvii):

| p | q | r | ((p v q) | → r) | → (p | → r) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w | w |
| w | w | f | w | f | w | f |
| w | f | w | w | w | w | w |
| w | f | f | w | f | w | f |
| f | w | w | w | w | w | w |
| f | w | f | w | f | w | w |
| f | f | w | f | w | w | w |
| f | f | f | f | w | w | w |

Die in (9) aufgeführten Tautologien entsprechen unseren ungefähren Vorstellungen von tautologischen Formeln: intuitiv läßt sich wohl nachvollziehen, daß eine Aussage, die die Form einer der Formeln (9.i-xvii) hat, notwendigerweise wahr sein muß. Es gibt aber auch andere Formeln, die zwar nach der formalen Definition ebenfalls Tautologien sind, aber für die dies weniger unmittelbar einleuchtet. Beispiele sind die unter (10) aufgelisteten Formeln:

(10) (i) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(ii) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(iii) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

(iv) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

(v) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(vi) $((p \& q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$

(vii) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Mutmaßliche deutsche Paraphrasen von Instanziierungen dieser Formeln vermitteln im allgemeinen nicht den Eindruck, daß wir es mit notwendig oder gar logisch wahren Aussagen zu tun haben. Zum Beispiel sceint der Satz "Wenn Fritz morgen nicht kommt, dann kommt Fritz morgen, wenn Sabine zuhause bleibt." eine Instanz von (10.ii) zu sein; trotzdem scheint dieser Satz scheint aber keineswegs eine (logische) Notwendigkeit auszudrücken. Ähnliche "Gegenbeispiele" gibt es für die anderen Formeln unter (10); manche dieser Formeln, z.B. (10.iii), (10.vi) und (10.vii), muten sogar besonders abstrus an. Unser natürlicher Widerstand gegen die Idee, Aussagen von diese Formen seien notwendig wahr, hängt wohl in allen Fällen mit der problematischen Entscheidung zusammen, den Konditionaljunktor $\rightarrow$ als rein wahrheitsfunktionalen Operator zu definieren, obwohl wir mit seinen angeblichen sprachlichen Gegenstücken - "wenn ... , dann ..", impliziert" und "folgt aus" - ganz andere semantische Intuitionen verbinden, nach denen es an erster Stelle der inhaltliche Zusammenhang zwischen A und B ist, der für das Wahr- oder Falschsein von "wenn A, dann B" verantwortlich ist, und nicht die einzelnen Wahrheitswerte von A und B als solche.

Damit ist nicht gesagt, daß ein Junktor wie $\rightarrow$ innerhalb eines formalen Systems wie des Aussagenkalküls oder des im nächsten Kapitel vorgestellten Prädikatenkalküls keine Berechtigung hätte. Insbesondere ist für den auf dem Aussagenkalkül aufbauenden Prädikatenkalkül die materielle Implikation, wie wir sehen werden, ein nützlicher und fast unentbehrlicher Baustein.

Neben den Tautologien läßt sich noch eine zweite Klasse von "rein logischen" Formeln unterscheiden. Dies sind die logischen Widersprüche, Formeln, die für jede Kombination von Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden Aussagekonstanten falsch sind. Ein wichtiges und besonders offensichtliches Beispiel ist die Formel $p \ \& \ \neg p$. Aber es gibt noch viele andere. Insbesondere ist alle Negationen von Tautologien logische Widersprüche.

Wahrheitstafeln erlauben uns nicht nur, festzustellen, welche Formeln des Aussagenkalküls Tautologien sind, sie erlauben es auch, zu verifizieren, wann eine Formel logisch aus anderen Formeln folgt. Der intuitive Begriff der logischen Folgerung ist dieser: eine Formel B *folgt aus* den Formeln $A_1, \ldots , A_n$, wenn das Wahrsein von $A_1, \ldots , A_n$ das Wahrsein von B sicherstellt; das heißt: wenn jede Kombination von Wahrheitswerten für die in den Formeln $A_1, \ldots , A_n$, B vorkommenden Aussagekonstanten, die $A_1, \ldots , A_n$ wahr macht, auch B wahr macht. Wir repräsentieren die Folgerungsbeziehung mit demselben Zeichen, das wir schon für logische Identität verwendet haben, indem wir es jetzt zwischen Prämissen und Schluß plazieren. Also schreiben wir statt "B folgt aus $A_1, \ldots , A_n$" auch "$A_1, \ldots , A_n \models B$".

Diese Notation weist "$\models$ B" als einen Sonderfall von "$A_1, \ldots, A_n \models B$" aus; sie suggeriert, daß man "$\models$ B" paraphrasieren können sollte als: "B folgt aus der leeren Prämissenmenge". Diese Paraphrase ist in der Tat im Einklang mit unseren Definitionen von Folgerung und logischer Identität. Denn nach der Folgerungsdefinition folgt B aus der leeren Prämissenmenge, wenn jede Kombination von Wahrheitswerten für die Aussagenkonstanten in B, die alle Prämissen in der leeren Prämissenmenge wahr macht, auch B wahr macht. Da es aber keine Prämissen in der leeren Menge gibt, ist das Antezedenz dieser Bedingung trivial erfüllt; und somit reduziert diese sich auf die kategorische Behauptung, daß jede mögliche Kombination von Wahrheitswerten der in B vorkommenden Aussagekonstanten B wahr macht. Nach der Definition von logischer Identität bedeutet das aber nun gerade, daß B eine Tautologie ist.

Der soeben beobachtete Zusammenhang zwischen logischer Folgerung und logischer Identität impliziert, daß eine Formel $A \rightarrow B$ genau dann eine logische Identität ist, wenn B aus A folgt. Zum Beipiel läßt sich leicht zeigen, daß, genauso wie die Formel $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ eine Tautologie ist, $p \rightarrow r$ folgt aus $(p \vee q) \rightarrow r$. Wir können dies feststellen, indem wir eine *Wahrheitstafel für die mutmaßliche Schlußfolgerung*

$(p \vee q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$

konstruieren. Diese Konstruktion liefert die Wahrheitswerte von Prämisse und Schluß für alle mögliche Kombinationen von Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden Aussagenkonstanten. Die Ähnlichkeit mit der Wahrheitstafel für $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ist offensichtlich.

(11)

| p | q | r | $(p \vee q)$ | $\rightarrow r$ | $\models$ | $p \rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | | w |
| w | w | f | w | f | | f |
| w | f | w | w | w | | w |
| w | f | f | w | f | | f |
| f | w | w | w | w | | w |
| f | w | f | w | f | | w |
| f | f | w | f | w | | w |
| f | f | f | f | w | | w |

Die Wahrheitstsafel zeigt, daß p → r aus (p v q) → r folgt. Denn sie zeigt, daß wenn eine Kombination, die Prämisse, sie auch den Schluß wahr macht. Umgekehrt folgt (p v q) → r nicht aus p → r, was sich aus der Wahrheitstafel für diese mutmaßliche Schlußfolgerung direkt ablesen läßt:

(12)

| p | q | r | p → r | ⊨ | (p v q) | → r |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | | w | w |
| w | w | f | f | | w | f |
| w | f | w | w | | w | w |
| w | f | f | f | | w | f |
| f | w | w | w | | w | w |
| f | w | f | w | | w | f |
| f | f | w | w | | f | w |
| f | f | f | w | | f | w |

Hier kriegt die Prämisse in der sechsten Reihe den Wert w, während der Schluß dort ein f hat. In diesem Fall garantiert die Wahrheit der Prämissenformel die Wahrheit der Schlußformel also nicht.

Der Ausdruck "mutmaßliche Schlußfolgerung" ist häßlich und umständlich. Der üblicherweise in der Logik verwendete Ausdruck ist "Argument". Also sind "(p v q) → r ⊨ p → r" und "p → r ⊨ (p v q) → r" beide Argumente. Das erste Argument ist *gültig*, das zweite *ungültig*.

Auf ähnliche Weise lassen sich Wahrheitstafeln für Argumente mit zwei oder mehr Prämissen erstellen. Die Wahrheitstafel für p → r, p → q, ¬ p ⊨ q & r sieht etwa so aus:

(13)

| p | q | r | p → r | p → q | ¬ p | ⊨ | q & r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | f | | w |
| w | w | f | f | w | f | | f |
| w | f | w | w | f | f | | f |
| w | f | f | f | f | f | | f |
| f | w | w | w | w | w | | w |
| f | w | f | w | w | w | | f |
| f | f | w | w | w | w | | f |
| f | f | f | w | w | w | | f |

Hier zeigen die letzten drei Kombinationen, daß der Schluß nicht aus den Prämissen folgt.

Die Beobachtung über das Argument p v q) $\rightarrow$ r $\models$ p $\rightarrow$ r und das Konditional ((p v q) $\rightarrow$ r) $\rightarrow$ (p $\rightarrow$ r) - daß p v q) $\rightarrow$ r $\models$ p $\rightarrow$ r gültig ist, zeigt sich darin, daß ((p v q) $\rightarrow$ r) $\rightarrow$ (p $\rightarrow$ r) eine Tautologie ist - läßt sich folgendermäßen generalisieren:

(14) Ein Argument "$A_1, \ldots, A_n \models B$" mit Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ und Schluß B ist gültig genau dann, wenn das Konditional $(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n) \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Dieser allgemeine Zusammenhang zwischen der Gültigkeit von Argumenten und der logischen Identität der ihnen entsprechenden Konditionale ist in der Logik als *Deduktiontheorem* bekannt.

In unserer Diskussion der Frage, wie die Disjunktion zu definieren ist, bemerkten wir, daß die exklusive Disjunktion sich mit Hilfe der inklusiven Discjunktion, der Konjunktion und der Negation ausdrücken läßt, z. B. als (A v B) & $\neg$(A & B). Ein zusätzlicher exklusiver Disjunktionsjunktor wäre daher redundant. In diesem Sinne ist die von uns angenommene Junktorenmenge {$\neg$, &, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$} aber ohnehin schon redundant. Dies zeigen insbesondere die Tautologien (9. viii - xiii). Aus diesen Tautologien ist ersichtlich, daß echte Teilmengen dieser Junktorenmenge dieselben Ausdrücksmöglichkeiten verfügbar machen. So würde es zum Beispiel reichen, sich auf die Junktoren $\neg$ und & zu bechränken; alle andere können dann mit Hilfe dieser beiden simuliert werden. Ebenso würde das Paar {$\neg$, $\rightarrow$} ausreichen, und dasselbe gilt für das Paar $\neg$, v}. (Interessanterweise reicht das Paar {$\neg$ , $\leftrightarrow$} nicht aus.)

##

## 2. Der Monadische Prädikatenkalkül.

Im vorigen Kapitel haben wir die Hypothese H, die es im Vier-Karten-Experiment zu überprüfen galt, als eine Konjunktion dargestellt

(H): Wenn auf der Vorderseite einer Karte ein Vokal steht, dann steht auf ihrer Rückseite eine gerade Zahl.

Eine solche Darstellung war möglich, weil klar war, daß es sich um eine spezifische Anzahl (vier) Karten handelte. Wir konnten daher die allgemeine Behauptung H auf jede einzelne dieser Karten beziehen und erhielten auf diese Weise für jede Karte ein Konjunkt:

(H') $(p_1 \rightarrow q_1) \;\&\; (p_2 \rightarrow q_2) \;\&\; (p_3 \rightarrow q_3) \;\&\; (p_4 \rightarrow q_4)$

Im allgemeinen lassen sich Universalaussagen wie H aber nicht explizit als solche Konjunktionen repräsentieren; denn die Elemente der Menge auf die sich die Aussage bezieht, brauchen ja nicht einzeln bekannt zu sein, wie wenn wir in der Physik eine Aussage über alle Neutronen machen. Manche Universalaussagen beziehen sich sogar auf unendliche Mengen, wie z.B die Menge der ganzen Zahlen. Solche Aussagen lassen sich grundsätzlich nicht als Konjunktionen paraphrasieren, weil dazu unendlich viele Konjunkte nötig wären.

Um die Allgemeinheit von H direkt zu erfassen, ohne auf jedes der betroffenen Objekte separat Bezug nehmen zu müssen, benötigen wir die Notation des Prädikatenkalküls. Insbesondere brauchen wir (i) ein Symbol für die Allgemeinheit; dies ist der All-Quantor $\forall$; und (ii) die Möglichkeit, "variable Behauptungen" zu repräsentieren, wie z.B. die Behauptung, daß

(15) wenn auf der Vorderseite von x ein Vokal steht, dann steht auf der Rückseite von x eine gerade Zahl,

wobei unbestimmt ist, auf welches Objekt sich x bezieht. Durch Zusammenfügung von dieser "Behauptung" mit $\forall$ soll sich dann die Repräsentation von H ergeben.

Die "variable Behauptung" (15) können wir auch als Eigenschaft von x betrachten - die Eigenschaft, die ein Objekt x genau dann hat, wenn für dieses Objekt folgndes gilt: Wenn seine Vorderseite ein Vokal hat, dann steht auf seiner Rückseite eine gerade Zahl. Diese Eigenschaft ist eine logisch komplexe Eigenschaft, die mittels *wenn ... , dann* aus zwei einfacheren Eigenschaften zusammengestellt ist - "auf der Vorderseite von x steht ein Vokal" und "auf der Rückseite von x steht eine gerade zahl". Und so werden wir sie auch formal analysieren. Das heißt: Wir führen ein *Prädikat* V für die Eigenschaft "die Vorderseite von _ hat ein Vokal" und G für die Eigenschaft "die Rückseite von _ hat eine gerade Zahl" ein. Überdies verwenden wir die *Variable* x, um auszudrücken, daß diese Eigenschaften dem "unbestimmten" Objekt x zukommen; wir schreiben "V(x)" für "auf der Vorderseite von x steht ein Vokal" und "G(x)" für "auf der Rückseite von x steht eine gerade Zahl". Wir können nun diese beiden Ausdrücke mit $\rightarrow$ zu dem komplexen Ausdrück $(V(x) \rightarrow G(x))$ verknüpfen, der die Eigenschaftsbezeichnung (15) symbolisiert. Durch Zusammenfügung von diesem Eigenschaftsausdruck mit dem All-Quantor, wobei letzterer direkt mit x kombiniert wird, damit eindeutig ist, daß sich die von ihm ausgesagte Allgemeinheit auf x bezieht, bekommen wir die Formel

(16) $(\forall x)(V(x) \rightarrow G(x))$.

Diese Formel besagt, daß für jedes Objekt x gilt: Wenn vorne ein Vokal steht, dann steht hinten eine gerade Zahl.

(16) kommt der Hypothese H nahe, repräsentiert sie aber immer noch nicht genau; denn H bezieht sich ausschließlich auf die vier ausgelegten Karten, während in (16) von willkürlichen Objekten die Rede ist. Wir können aber die Einschränkung auf Karten explizit machen, indem wir den komplexen Eigenschaftsausdruck von (16) durch einen anderen von folgendem Inhalt ersetzen:

(17) entweder ist x keine Karte, oder es ist der Fall, daß, wenn auf der Vorderseite von x ein Vokal steht, auf der Rückseite von x eine gerade Zahl steht.

Führen wir für die Eigenschaft "ist eine von den vier Karten" das Prädikat K ein, dann läßt sich "x ist eine der vier Karten" als "K(x)" und die komplexe Eigenschaft (17) als

(18) $(\neg K(x) \lor (V(x) \rightarrow G(x)))$

darstellen. Durch Voranstellung des Quantifikationsausdrucks $(\forall x)$ bekommen wir jetzt eine intuitiv adequate Symbolisierung von H:

(19) $(\forall x)(\neg K(x) \lor (V(x) \rightarrow G(x)))$

Im Hinblick auf die Semantik des Konditionaljunktors $\rightarrow$, die wir im ersten Kapitel gewählt haben, ist im allgemeinen $\neg A \vee B$ äquivalent mit $A \rightarrow B$ und deshalb ist (18) äquivalent mit

(20) $(K(x) \rightarrow (V(x) \rightarrow G(x)))$

Wir können H daher auch als (21) symbolisieren:

(21) $(\forall x)(K(x) \rightarrow (V(x) \rightarrow G(x)))$

(21) entspricht der üblichen Art und Weise, wie man Universalaussagen von der Form "Alle so-und-so ..." oder "Jeder so-und-so ..." im Prädikatenkalkül darstellt: Dem Quantifikationsausdruck folgt ein Konditional, dessen Antezedens von der Form "so-und-so (x)" ist und dessen Konsequens den durch "..." angedeuteten Eigenschaftsausdruck symbolisiert.

N.B. Genauso wie (18) äquivalent ist mit (20), ist auch $(V(x) \rightarrow G(x))$ äquivalent mit $(\neg V(x) \vee G(x))$. Also läßt sich H auch wie in (22) darstellen:

(22) $(\forall x)(K(x) \rightarrow (\neg V(x) \vee G(x)))$

Im allgemeinen ergeben sich bei Symbolisierungsaufgaben mehrere Lösungsmöglichkeiten. Wielche von diesen Möglichkeiten man auswählt, ist zum Teil eine Frage der logischen Gepflogenheiten, aber letztendlich von keiner Bedeutung.

Für die Rechtfertigung der Lösung zum Vier-Karten-Problem bringt unsere neue Darstellung von H allerdings nicht viel. Denn dazu müssen wir diese Übersetzung von H doch wieder auf die einzelnen Karte beziehen. Wir können dies erreichen, indem für jede der vier Karten einen "Namen" einführen. nehmen wir z.B. als Namen für die erste, zweite, dritte und vierte Karte die Symbole $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$. Dann können wir für jedes der von diesen Namen bezeichneten Objekte ausdrücken, daß es die in (17) beschriebene Eigenschaft hat. Für die erste Karte ergibt sich die Formel in (23):

(23) $(\neg K(c_1) \vee (V(c_1) \rightarrow G(c_1)))$

Wenn gegeben ist, daß $c_1$ eine Karte ist - also daß $K(c_1)$ wahr ist - läßt sich (23) auf sein zweites Disjunkt, also auf $V(c_1) \rightarrow G(c_1)$ reduzieren, eine Formel, die besagt, daß auf der Rückseite von $c_1$ eine gerade Zahl steht, wenn vorne ein Vokal ist. Ähnlich lassen sich die im ersten Kapitel betrachteten Konditionale für die anderen drei Karten aus (19) ableiten.[5] Hat man die vier Konditionale einmal etabliert, dann läuft der Rest der Erklärung weiter wie vorher.

Neben dem All-Quantor enthält der Prädikatenkalkül auch einen *Existenz*-Quantor, mit Hilfe dessen sich Aussagen von der Form "Es gibt ..." formalisieren lassen. Als Symbol verwenden wir das umgekehrte E,

---

5 Das Prinzip, nach dem wir (23) aus (19) ableiten können, ist unter dem Namen "Universalinstanziierung" bekannt. Es ist als rein formales Prinzip zu verstehen, das sich nur auf die symbolische Struktur der betroffenenen Formeln bezieht - der inferierten und derjenigen, aus der sie inferiert wird, wie folgende Formulierung des Prinzips zeigt

(UI) Sei $(\forall x)A$ eine Formel, in der der Quantifikationsausdruck $(\forall x)$ auf die Formel A angewandt ist, und sei c eine Individuenkonstante. Dann läßt sich aus $(\forall x)A$ die Formel $A(c/x)$ ableiten, die sich aus A dadurch ergibt, daß jedes "freie" Vorkommen von x in A durch c ersetzt wird.

(Freie Vorkommen von Variablen sind solche, die nicht von einem Quantor gebunden werden. z.B. sind in der Formel $(P(x)\ \&\ (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)))\ \mathrm{v}\ S(x)$ das erste und das letzte Vorkommen von x frei, während die drei mittleren Vorkommen als gebunden gelten. Eine genaue Definition von *freien* und *gebundenen Variablenvorkommen* folgt in einem späteren Abschnitt.)

UI ist eine von vielen formalen Inferenzprinzipien, mit Hilfe derer man aus gegebenen Formeln des Prädikatenkalküls andere Formeln ableiten kann. Auch für den Aussagenkalkül lassen sich solche Prinzipien formulieren, wie z. B. das Prinzip, daß aus einer Konjunktion A & B sowohl A als auch B abzuleiten sind, oder das vielleicht bekannteste Prinzip von allen, der sogenannte Modus Ponens, nach dem aus den Formeln $A \rightarrow B$ und A die Formel B geschlossen werden kann - mit anderen Worten: aus zwei Behauptungen, die in der rein formalen Beziehung zueinander stehen, daß die erste die Form eines Konditionals hat und die zweite das Antezendenz dieses Konditionals ist, darf eine Behauptung geschlossen werden, die die Form des Konsequenz des Konditionals hat. Eines der zentralen Anliegen der formalen Logik ist es, Systeme von solchen Prinzipien zu finden, die geymeinsam alle logisch korrekte Schlußfolgerungen ableiten können: Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$ ein Argument ist, deren Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ und Schluß B Formeln des Prädikatenkalküls sind, und B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$, dann kann man B durch eine Verkettung von Anwendungen der zum System gehörigen Prinzipien deduzieren.

In diesem Seminar werden wir uns vorläufig nicht systematisch mit formalen Inferenzprinzipien befassen. Erst im ?? Kapitel werden wir uns mit solchen Prinzipien und den aus ihnen konstituierten Beweissystemen auseinandersetzen.

$\exists$. Mit Hilfe von $\exists$ können wir z.B. die Behauptung, daß es eine Karte gibt, auf deren Vorderseite ein Vokal steht, durch die Formel (24) repräsentieren:

(24) $(\exists x)\ (K(x)\ \&\ V(x))$

Ebenso läßt sich ausdrücken, daß es sowohl eine Karte gibt, auf deren Vorderseite ein Vokal steht,
als auch eine, auf deren Rückseite eine gerade Zahl steht:

(25) $(\exists x)\ (K(x)\ \&\ V(x))\ \&\ (\exists x)\ (K(x)\ \&\ G(x))$

Letztere Formel, die von der in (1) gezeigten Situation direkt verifiziert wird[6], soll von der folgenden unterschieden werden, die behauptet, daß ein und dieselbe Karte vorn ein Vokal und hinten eine gerade Zahl hat:

(26) $(\exists x)\ (K(x)\ \&\ (V(x)\ \&\ G(x)))$

Diese Formel ist nicht direkt durch die Situation in (1) verifiziert, folgt aber aus ihr zusammen mit der Hypothese H. Für eine formale Ableitung von (26) ließen sich beide der oben gegebenen Formalisierungen von H, (19) bzw. (21), verwenden. Insbesondere ist (26) aus (24) und (21) ableitbar:

(27) $(\forall x)(K(x) \rightarrow (V(x) \rightarrow G(x))),\ (\exists x)\ (K(x)\ \&\ V(x)) \models (\exists x)\ (K(x)\ \&\ (V(x)\ \&\ G(x)))$

ist ein gültiges Argument.

Wir kommen jetzt zur formalen Definition der Syntax des Prädikatenkalküls. Wir beschränken uns vorerst auf den *monadischen* Prädikatenkalkül, in dem nur *monadisch*e, oder *einstellige*, Prädikate - also: Prädikate, die Eigenschaften repräsentieren - vorkommen, aber noch keine mehrstellige, die dazu dienen, *Relationen* darzustellen.[7]

---

6 Weil die erste Karte das erste Konjunkt und die vierte das zweite Konjunkt verifiziert.

7 Zweistellige Relationen werden in natürlichen Sprachen u.A. von transitiven Verben ausgedrückt, wie z.B. von dem Verb *erregen*. Zur Formalisierung von Sätzen, in denen dieses Verb vorkommt, brauchen wir ein ihm entsprechendes zweistelliges Prädikat, wie beispielswiese E. Den Satz "Jede Kuh erregt jeden Stier." läßt sich dann prädikatenlogisch als:

Der monadische Prädikatenkalkül ist eine Erweiterung des Aussagenkalküls von Kapitel 1, d.h. alle Formeln des Aussagenkalküls sind ebenfalls Formeln des monadischen Pradikatenkalküls

Syntax des monadischen Prädikatenkalküls:

Symbole:
1. Aussagenkonstanten: p, q, r, ... $p_1$, $p_2$, $p_3$, ...
2. Junktoren: $\neg$, &, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
3. Klammern: (,).
4. Einstellige Prädikatsymbole: P, Q, R, ... , $P_1$, $P_2$, ... (auch andere Großbuchstaben)
5. Variablen: x, y, z, ...$v_1$, $v_2$, $v_3$, ...
6. Individuenkonstanten: c, d, e, ...., $c_1$, $c_2$, $c_3$, ...
7. Quantoren: $\forall$, $\exists$.

Terme:
1. Jede Variable ist ein *Term*
2. Jede Individuenkonstante ist ein *Term*.

Formeln:
1. Jede Aussagenkonstante ist eine *Formel*.
2. Wenn A, B Formeln sind, dann sind auch $\neg$A, (A & B), (A v B), (A $\rightarrow$ B), und (A $\leftrightarrow$ B) *Formeln*.
3. Wenn P ein Prädikatsymbol und t ein Term, dann ist P(t) eine *Formel*.
4. Wenn A eine Formel ist und v eine Variable, dann sind auch ($\forall$v)A und ($\exists$v)A *Formeln*.

N.B. Die hier definierte Syntax spezifiziert eine unendliche Anzahl von Variablen. In unseren Beispielen von prädikatenlogischen Formeln haben wir aber bisher nur die Variable x verwendet. Brauchen wir denn die anderen Variablen überhaupt? Antwort: Im monadischen Prädikatenkalkül strikt gesprochen nicht: Alles, was sich im hier definierten monadischen Prädikatenkalkül sagen läßt, läßt sich auch mit Formeln sagen, in denen insgesamt nur eine Variable vorkommt. Im allgemeinen Prädikatenkalkül, in dem es auch mehrstellige Prädikate gibt und zu dem wir den monadischen demnächst erweitern werden (s.

---

$$(\forall x)(\ K(x) \rightarrow (\forall y)(\ S(y) \rightarrow E(x,y)))$$

darstellen. Durch die Hinzunahme von mehrstelligen Prädikaten wird die Ausdruckskraft des Prädikatenkalküls entscheidend erweitert. Der Kalkül wird aber dadurch auch wesentlich komplizierter. Deshalb befassen wir uns zuerst mit dem monadischen Kalkül

Kap.??), ist das aber nicht länger der Fall. Dort wäre jeder endliche Variablenvorrat zu knapp.

Auch im monadischen Kalkül ist es hin und wieder empfehlenswert, mehrere Variablen zu verwenden, auch wenn dies strikt gesprochen nicht nötig ist. Zum Beispiel können wir die Aussage, daß es einen guten Film gibt als auch einen, der nicht gut ist, sowohl mit (28) als auch durch (29) formalisieren:

(28) $(\exists x)\ (F(x)\ \&\ G(x))\ \&\ (\exists y)\ (F(y)\ \&\ \neg G(y))$

(29) $(\exists x)\ (F(x)\ \&\ G(x))\ \&\ (\exists x)\ (F(x)\ \&\ \neg G(x))$

Die Verwendung von zwei Variablen x und y in (28) hat ein gewisses intuitives Appeal, weil Objekte, die der Variable im ersten und der Variable im zweiten Konjunkt entsprechen, notwendigerweise von einander verschieden sein müssen (da ein Objekt, das F aber nicht G ist, mit einem, das sowohl F als auch G ist, nicht identisch sein kann). Dies ist aber eine rein "ästhetische" Überlegung. Formal ist (28) äquivalent mit (29), einer Formel, die ebenfalls aus zwei Konjunkten besteht, von der das erste sagt, daß es einen guten Film gibt, und das zweite, daß es einen Film gibt, der nicht gut ist.

## 2.1 Monadische Prädikatenlogik und die Aristotelische Syllogismuslehre.

Es gibt eine enge Beziehung zwischen dem monadischen Prädikatenkalkül und der Aristotelischen Lehre des *Syllogismus*.

Über mehr als 2200 Jahre war der Syllogismus der Kern der formalen Logik des Abendlandes. Die Lehre des Syllogismus wurde im vierten Jahrhundert v.Chr. entwickelt von Aristoteles (384 - 322), dem vielleicht größten Philosophen und Wissenschaftler aller Zeiten. So weit wir wissen, war Aristoteles der erste, der den grundsätzlich formalen Charakter des logischen Schließens erkannte: Die Möglichkeit, auf Basis von rein formalen Beziehungen zwischen gewissen Aussagen $A_1$, $A_2$, .. und B, die Aussage B aus den Prämissen $A_1$, $A_2$, .. zu schließen. Durch Anwendung solcher formalen Schlußmehanismen ist es möglich, aus alten zu neuen Informationen und Einsichten zu gelangen, obwohl man beim Schließen selbst von dem spezifischen Inhalt von Prämissen und Schluß vollends abstrahiert und nur auf ihre logische Form achtet.

Die Aristotelischen Inferenzprinzipien, die sich allein aufder Form der Aussagen stützen, und über die Aristoteles in verschiedenen logischen Werken, zusammen bekannt als das Aristotelische "Organon", berichtete, gehören in großer Mehrheit seiner Lehre der *Syllogismen* an. Das einfachste und bekannteste syllogistische Muster ist der sogenannte *Syllogismus in Barbara*[8]:

(30) Alle A sind B.
Alle B sind C.
Also: Alle A sind C.

Wie jedes andere formal gültige Inferenzmuster hat (30) Instanzen in den inhaltlich unterschiedlichsten Bereichen. Indem wir für A das Prädikat "(ist ein) Professor", für B das Prädikat "(ist ein Beamter" und für C das Prädikat "(ist) faul" einsetzen, wird (30):

(31) Alle Professoren sind Beamte.
Alle Beamten sind faul.
Also: Alle Professoren sind faul.

Setzen wir für A ein: "(ist ein) Mistkäfer,
für B: "(ist ein) Käfer
für C "(ist ein) Insekt"

so bekommen wir.

(32) Alle Mistkäfer sind Käfer.
Alle Käfer sind Insekten.
Also: Alle Mistkäfer sind Insekten.

Mit A: "(ist ein) Quadrat"
B: "(ist ein) Rechteck"
C: "(ist ein) Viereck"

(33) Alle Quadrate sind Rechtecke
Alle Rechtecke sind Vierecke.
Also: Alle Quadrate sind Vierecke.

---

8 In dér antiken und mittelalterlichen Tradition hatten die syllogistischen Inferenzmuster alle ihren Namen. Diese Namen bestanden immer aus drei Silben, deren Vokale den relevanten Partikeln von Ausgangsaussagen und Schluß entsprechen. z.B. verät der Name "Barbara" das sowohl die beiden Prämissen als auch der Schluß des von ihm benannten Muster mit dem Wörtchen "alle" anfangen.

Und die Zuordnung::

A: "(ist etwas, das) blinkt"
B: "(ist) Gold"
C: "(ist) wertvoll"

führt zu einer Instantiierung, die sich etwa wie folgt grammatisch formulieren läßt:

(34) Alles, was blinkt, ist Gold.
Alles, was Gold ist, ist wertvoll.
Also: Alles, was blinkt, ist wertvoll.

Das Muster (30) ist *gültig*, weil der Schluß "Alle A sind C." nicht falsch sein kann, wenn die Prämissen "Alle A sind B." und "Alle B sind C." beide wahr sind. Die Gültigkeit überträgt sich selbstverständlich auf alle Instanziierungen - immer folgt der Schluß aus den Prämissen. Damit ist aber nicht gesagt, daß jede Instanziierung auch ein *gutes* Argument ist; denn sind die Prämissen zweifelhaft oder sogar falsch, dann folgt aus der Gültigkeit des Arguments nichts Konkretes über die Wahrheit des Schlußes. (Z.B. zeigt (34) für einen, der bezweifelt, ob alles, was blinkt, Gold ist, nicht, daß alles, was blinkt, wertvoll ist. Und einen, der nicht glauben will, daß jeder Professor ein Beamter ist, wird man nicht mit (31) davon überzeugen können, daß alle Professoren faul sind.

Die Gültigkeit von (30) läßt sich leicht mit der Methode der sogenannten *Venn-Diagramme* feststellen. (Nach dem englischen Logiker John Venn (1834-1923)). Diese Methode besteht darin, daß man die Mengen der Objekte, die die Prädikate A, B, C erfüllen, als durch Kurven begrenzte Punktmengen darstellt, und zwar so, daß die Prämissen des zu überprüfenden Inferenzmusters erfüllt sind. Läßt sich dies nur so machen, daß auch der Schluß des Musters immer wahr ist, dann ist damit die Gültigkeit des Musters nachgewiesen.

Für das Muster (30) ist leicht zu erkennen, daß dies in der Tat der Fall ist. Stellen wir z.B. die Mengen der A bzw. B erfüllenden Punkte durch zwei Ovale dar, so daß die erste Prämisse erfüllt ist, dann muß natürlich das erste Oval ganz im zweiten enthalten sein. Ebenso erfordert die zweite Prämisse, daß das zweite Oval ganz in der Menge von Punkten, die C erfüllen enthalten ist. Daß dann auch das erste Oval ganz in dieser letzten Menge enthalten sein muß, braucht wohl kaum einer weiteren Erläuterung. Stellen wir auch die letzte Menge durch ein Oval dar, so bekommen wir das folgende Bild:

(35)

Wenn es eine Möglichkeit gibt, die Punktmengen so zu wählen, daß die Prämissen eines (mutmaßlichen) Inferenzmusters verifiziert, der Schluß dessen aber falsifiziert wird, so ist damit gezeigt, daß wir es nicht mit einem gültigen Muster zu tun haben. Ein Beispiel ist:

(36) Alle A sind B<br>
Es gibt B, die C sind<br>
Also: Es gibt A, die C sind.

Folgendes Diagramm zeigt die Ungültigkeit dieses Musters:

(37)

Dagegen ist (38) wieder gültig:

(38) Es gibt A, die B sind.
Alle B sind C.
Also: Es gibt A, die C sind.

Dies zeigt der Versuch, die A, B und C erfüllenden Punktmengen so zu bestimmen, daß die Prämissen wahr sind, aber der Schluß falsch: ein solcher Versuch ist, wie man schnell sieht, zum Scheitern verurteilt. Denn damit die erste Prämisse wahr ist, müssen sich die Mengen für A und B überschneiden. Andererseits fordert die zweite Prämisse, daß die Menge für B in der Menge für C enthalten ist. Dies gilt dann aber insbesondere für den Teil, den die Menge für B mit der Menge für A gemeinsam hat. Dieser Teil ist also auch der Menge für A und der für C gemeinsam.

Aus dieser letzten Überlegung wird ersichtlich, daß man die Venn-Diagramme eigentlich gar nicht braucht, um die Gültigkeit solcher Inferenzmuster nachzuweisen. Und dasselbe gilt für das Nachweisen der Ungültigkeit. Dennoch gibt die Methode der Venn-Diagramme uns ein leicht handhabbares Mittel, um solche Nachweise zu liefern. Für die typischen Inferenzmuster der Syllogismuslehre, in denen es sich immer um drei symbolische Prädikate handelt, ist die Methode besonders leicht anzuwenden, weil man sich bei der Darstellung der erfüllenden Punktmengen ganz auf Ovale (sogar auf Kreise) beschränken kann: Ist es überhaupt möglich, die Erfüllungsmengen so zu wählen, daß die Prämissen wahr sind aber der Schluß falsch, so ist dies auch möglich, indem man für diese Mengen als Ovale darstellt. Die Beschränkung auf Ovale macht das Venn-Diagramm-Verfahren besonders übersichtlich. Bei Inferenzmuistern mit mehr als drei symbolischen Prädikaten ist, die Möglichkeit dieser Beschränkung nicht länger gegeben und damit verliert die Methode von Venn viel von ihrer Attraktivität.

Die Aussagen, die in der Syllogismuslehre betrachtet werden, sind alle im monadischen Prädikatenkalkül ausdrückbar. Wie wir sahen, kann man einen Satz von der Form "Alle A sind B." als "Jedes Objekt hat die Eigenschaft, daß es wenn A, dann auch B ist.", also als

(39) $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

repräsentieren.

Einen Satz wie "Es gibt A, die B sind." ist repräsentierbar mit Hilfe des Existenzquantors:

(40) $(\exists x)(A(x) \ \& \ B(x))$

Setzen wir überdies das schon im Rahmen des Aussagenkalküls eingeführte "folgt aus"- Zeichen statt des oben verwendeten "Also" ein, dann bekommen (30), (36) und (38) die Symbolisierungen:

(30') $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$
$(\forall x)(B(x) \rightarrow C(x))$
$\models (\forall x)(A(x) \rightarrow C(x))$

(36') $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$
$(\exists x)(B(x) \ \& \ C(x))$
$\models (\exists x)(A(x) \ \& \ C(x))$

(38') $(\exists x)(A(x) \ \& \ B(x))$
$(\forall x)(B(x) \rightarrow C(x))$
$\models (\exists x)(A(x) \ \& \ C(x))$

Zu der Frage, genau welche Typen von Argumentmustern zur Syllogismuslehre gehören sollen, gibt es eigentlich keine prinzipielle Antwort. Zum Beispiel ist nicht direkt einzusehen, wieso ein Muster wie:

(41) Die meisten A sind B.
Alle B sind C.
Also: Die meisten A sind C.

nicht Gegenstand der Syllogismustheorie sein sollte, aber im allgemeinen werden solche Muster mit Aussagen die statt "alle" oder "es gibt" den Ausdruck "die meisten" enthalten, nicht berücksichtigt und man beschränkt sich auf solche, in denen die symbolischen Prädikate durch die Ausdrücke "alle", "es gibt" und "keine" (oder damit äquivalente Ausdrücken, wie "jeder" oder "manche") miteinander verknüpft sind. Aussagen mit "keine" lassen sich im Prädikatenkalkül als Negationen von Existenzaussagen repräsentieren. Zum Beispiel wird aus:

(42) Alle A sind B.
Keine B sind C
Also: Keine A sind C

(42') $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$
$\neg (\exists x)(B(x) \;\&\; C(x))$
$\models \neg (\exists x)(A(x) \;\&\; C(x))$

Die Syllogismuslehre ist nie wesentlich über die Identifizierung einzelner Inferenzmuster als gültig oder ungültig hinausgekommen. In dieser Hinsicht unterscheidet sie sich grundsätzlich von der modernen Logik, die sich bestrebt, (i) den Gültigkeitsbegriff *semantisch* zu definieren (wie wir das für den Aussagenkalkül schon gemacht haben) und (ii) prinzipiengesteuerte Beweisverfahren so zu formulieren, daß damit alle gültigen Inferenzen abgeleitet werden können. Die Syllogismuslehre blieb dagegen immer eine Art von logischer Naturkunde. Logikunterricht bestand in den Zeiten, zu denen Logik mit Aristotelischer Logik identisch war, weitgehend aus dem Auswendig-Lernen von den gültigen und ungültigen Inferenzmustern, die die Theorie als solche identifiziert hatte.

Die Syllogismuslehre hat dennoch einen systematischen Aspekt, insofern sie es erlaubt, durch Verkettung von Inferenzmustern, die drei symbolische Prädikate involvieren, die Gültigkeit von komplexeren Mustern nachzuweisen. Ein sehr einfaches Beispiel ist:

(43) $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$
$(\forall x)(B(x) \rightarrow C(x))$
$(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x))$
$\models (\forall x)(A(x) \rightarrow D(x))$

dessen Gültigkeit sich aus zwei Anwendungen des "Barbara"-Syllogismus ergibt: Eine erste Anwendung erlaubt es, aus den ersten beiden Prämissen $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ und $(\forall x)(B(x) \rightarrow C(x))$ die Aussage $(\forall x)(A(x) \rightarrow C(x))$ zu schließen. Ersetzen wir die beiden ersten Prämissen in (43) durch diesen Schluß, dann ergibt sich wiederum das "Barbara"-Muster

(44) $(\forall x)(A(x) \rightarrow C(x)))$
$(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x))$
$\models (\forall x)(A(x) \rightarrow D(x))$

Also folgt der Schluß dieses Musters auch aus den drei ursprünglichen Prämissen.

Ein etwas komplizierterer Fall ist das Muster

(45) Es gibt A, die B sind.
Alle B sind C.
Alle C sind D.
Keine D sind E
Also: Es gibt A, die keine E sind.

Übung: (i) Zeigen Sie, wie die Gültigkeit von (45) sich aus Verkettung von drei gültigen Syllogismusmustern ergibt, die jeweils nur drei Prädikatssymbole involvieren. (ii) Symbolisieren Sie (45) im monadischen Prädikatenkalkül.

## 2.2 Monadischer Prädikatenkalkül und Konzepthierarchien

In der Künstlichen Intelligenz - und insbesondere auch in der Computerlinguistik - wird häufig von Information über *Konzepthierarchien* Gebrauch gemacht. Eine Konzepthierarchie besteht aus einer Menge von Konzepten mitsamt bestimmter logischer Beziehungen zwischen diesen, wie *Subsumption* oder *Inkompatibilität*. Es ist üblich, solche Informationen mit Hilfe von *Graphen* darzustellen, in denen die *Knoten* die Konzepte und die *Kanten* die logischen Beziehungen repräsentieren. Unter einem *Konzept* verstehen wir in diesem Zusammenhang das, was man auch als die Bedeutung eines einstelligen Prädikats auffassen könnte. Ebenso wie solche Prädikate dienen Konzepte also dazu um Gegenstände voneinander zu unterscheiden, bzw. zu klassifizieren.[9]

---

[9] Innerhalb der philosophishen Logik wird oft zwischen einstelligen Prädikaten, Eigenschaften und Konzepten unterschieden: Prädikate sind Symbole oder Ausdrücke,die entweder einer logischen Kunstsprache wie der Prädikatenlogik oder einer natürlichen Sprache angehören. (Insbesondere gibt es in natürlichen Sprachen wie Deutsch zahlreiche lexikalische Prädikate - die meisten Nomina, sowie auch viele Adjektive und intransitive Verben).
Konzepte gehören ebenso wie Prädikate zu dem Gerät, das Lebewesen wie wir zur Unterscheidung und Klassifikation von Gegenständen verwenden, aber sie sind sprachunabhängig. Zum Beispiel ist die Fähigkeit von Babies, die noch keine Sprache beherrschen, Gegenstände an ihrer Form oder Farbe zu erkennen, als Beweis dafür zu sehen, daß sie über Farbkonzepte wie "rot" und "grün", oder Formkonzepte wie "rund" und "viereckig" verfügen. Aus demselben Grund liegt es ebenfalls nahe, daß auch viele Tierarten über ein Arsenal von Konzepten verfügen.
Unter einer *Eigenschaft* vesteht man im allgemeinen etwas, das von der Sprache unabhängig ist. Zum Beispiel hat ein quadratischer Gegenstand die Eigenschaft, viereckig zu sein, aufgrund seiner intrinsischen Beschaffenheit, ungeachtet ob

(46) ist eine Variante von einem Beispiel, das in einem der klassisichen Texten über Konzepthierarchien aus den Bereichen der Künstlichen Intelligenz und der Kognitionswissensschaft, Quillian (1969), diskutiert wird:

(46)

Tier

Vogel Fisch

Nachtigall Strauß Makrele Hecht

Tweety Woofy

Die Knoten dieses Graphen sind mehrheitlich allgemeine Konzepte, wie *Tier*, *Vogel*, *Nachtigall*, *hat Flügel* oder *kann fliegen*, aber es kommen auch "Individuenkonzepte" vor, wie *Tweety* und *Woofy*. Diese sind als Konzepte zu verstehen, die auf genau ein Individuum, den "Tweety" bzw. "Woofy" genannten Vogel, zutreffen. Die Kanten zwischen zwei Knoten bedeuten immer Konzeptsubsumption: das Konzept am oberen

---

es eine Sprache gibt, in der diese Eigenschaft bezeichnet oder beschrieben werden kann oder Wesen, die im Stande sind, festzustellen oder zu mutmaßen, daß dies so ist.

Die Eigenschaft, viereckig zu sein, das Konzept des Viereckigseins und das deutsche Prädikat "viereckig" sind also alle von einander zu unterscheiden, aber es gibt nätürlich enge Beziehungen zwischen ihnen. In üblicher philosophischen Terminologie heißt es, daß das Prädikat die Eigenschaft bedeutet, das es das Konzept ausdrückt, und daß die Eignschaft der Inhalt des Konzepts (und ebenfalls Inhalt des Prädikats) ist. Es werden allerdings aber auch andere Ausdrücke für diese Beziehungen gebraucht.

Neben diesen drei Begriffen gibt es noch einen vierten, der sich für uns als besonders wichtig erweisen wird. Einstellige Prädikate, Konzepte und Eigenschaften dienen alle dazu, zwischen den Dingen zu unterscheiden, die sie haben oder erfüllen, und denjenigen, für die das nicht der Fall ist. In jedem Fall wird also die Gesamtheit der Dinge in zwei Teile - den Teil der Dinge, die die Eigenschaft haben, das Prädikat erfüllen oder dem Konzept entsprechen, und den restlichen. Der erste dieser beiden Teile heißt die *Extension* - des Prädikats, des Konzepts oder der Eigenschaft. In diesem Text wird es hauptsächlich um Prädikate und ihre Extensionen gehen. Eigenschaften und Konzepte werden nur in informellen Erläuterungen auftauchen und auch das verhältnismäßig selten.

Ende der Kante subsumiert das am unteren Ende situierte. Dies bedeutet, daß jeder Gegenstand, auf den das untere Konzept zutrifft, auch das obere Konzept zutrifft. Diese Information läßt sich leicht auch im Monadischen Prädikatenkalkül ausdrücken.

Verwenden wir für die in (46) vorkommenden allgemeinen Konzepte die in (47) aufgelisteten Abkürzungen und für die Individuenkonzepte Konstanten, die die entsprechenden Individuen bezeichnen (wir nehmen dabei an, daß die Abkürzungen einstellige Prädikatssymbole und die Konstanten Individuenkonstanten des Prädikatenkalküls sind), dann können wir die in (46) enthaltene Subsumptionsinformation wie in (48) ausdrücken.

(47) T: Tier
V: Vogel F: Fisch S: Strauß M: Makrele
N: Nachtigall H: Hecht

tw: Tweety
wo: Woofy

(48)

$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow T(x))$
$(\forall x)\ (F(x) \rightarrow T(x))$
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow V(x))$
$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow V(x))$
$(\forall x)\ (M(x) \rightarrow F(x))$
$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow F(x))$
$N(tw)$
$S(wo)$

Oft werden solche Hierarchien um zusätzliche Subsumptionsinformationen erweitert, die sich intuitiv von denen unterscheiden, die durch die Graphenkanten vermittelt werden. Die Knoten des Subsumptionsgraphen sind als Typen von Objekten zu verstehen, wobei es oft vorkommt, daß ein Typ in eine Anzahl von spezifischeren Typen unterteilt wird. Die Kanten des Graphs sind dazu da, diese Unterteilungen zu explizieren. Daneben unterscheiden sich Typen von Objekten oft durch bestimmte Merkmale, die die Exemplare des Typs identizieren, oder die beim Erkennen, ob wir es mit einem Exemplar des Typs zu tun haben, eine wichtige Rolle spielen können. Obwohl es keine rein formallogischen Gründe gibt, das Besitzen eines Merkmals

als neuen Typ zu betrachten und im Subsumptionsgraphen für diesen einen zusätzlichen Knoten einzutragen, es würde damit aber der intuitive Unterschied zwischen Typen oder Kategorien von Objekten einerseits und Merkmalen andererseits verloren gehen. Deshalb werden die Merkmale oft in Subsumptionsgraphen den Typenknoten als zusätzliche Informationen angehängt. Die einfachste Interpretation einer solchen Markierung des Typenknotens T mit einem Merkmal M ist, daß jedes Exemplar des Typs das Merkmal besitzt. (Aber siehe unten für eine komplexere Interpretation1) Dies bedeutet, daß alle Untertypen von T das Merkmal M ebenfalls besitzen. Merkmale vererben sich also von Typen auf ihre Teiltypen. Solche Vererbungen sind besondere Fälle von logischen Inferenzen, die bei vielen Aufgaben der Wissensverarbeitung - wie z.B. bei der Interpretation natürlicher Sprache, eine prominente Rolle spielen. Subsumptionsgraphen werden in der Wissensverarbeitung vielfach als Strukturen verwendet, in denen Vererbungsinferenzen mit sehr großer Geschwindigkeit ausgeführt werden können.

(49) ist eine Erweiterung von (46), die einige Merkmalsmarkierungen schon in (46) vorhandener Typen enthält. In (49) ist jeder Typ mit einer (möglicherweise leeren) Liste von Merkmalen versehen, die als allgemeine Eigenschaften der Objekte des Typs zu betrachten sind.

(49)

hat eine Haut
Tier ernährt sich
atmet

hat Flügel
Vogel
hat Federn

hat Flossen
Fisch
hat Kiemen

singt
Nachtigall
bis zu 17 cm

rennt
Strauß
bis zu 2.4 m

Makrele
lebt im Meer

Hecht
lebt in Süßwasser

Tweety nett

Woofy launisch

Wir können auch (49) im Monadischen Prädikatenkalkül beschreiben, indem wir die Beschriebung (48) um die neuen, die Merkmale involvierenden Inklusionsbedingungen erweitern. (50) gibt den dazu erforderliche erweiterte Übersetzungsschlüssel

(50)

| | | | |
|---|---|---|---|
| T: | Tier | HeH: | hat eine Haut |
| V: | Vogel | Es: | ernährt sich |
| N: | Nachtigall | At: | atmet |
| S: | Strauß | Flü: | hat Flügel |
| F: | Fisch | Fe: | hat Federn |
| M: | Makrel | Si: | singt |
| H: | Hecht | Re: | rennt |
| Ne: | nett | La: | launisch |
| Flo: | hat Flossen | Ki: | hat Kiemen |
| Lim: | lebt im Meer | LiS: | lebt in Süßwasser |

17 cm: wird bis zu 17 cm. groß
2.4 m: wird bis zu 2.4 m. groß

tw: Tweety
wo: Woofy

(51)

$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow T(x))$
$(\forall x)\ (F(x) \rightarrow T(x))$
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow V(x))$
$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow V(x))$
$(\forall x)\ (M(x) \rightarrow F(x))$
$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow F(x))$
$N(tw)$
$S(wo)$

$(\forall x)\ (T(x) \rightarrow HeH(x))$
$(\forall x)\ (T(x) \rightarrow Es(x))$
$(\forall x)\ (T(x) \rightarrow At(x))$
$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow Fl(x))$
$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow Fe(x))$
$(\forall x)\ (F(x) \rightarrow Flo(x))$
$(\forall x)\ (F(x) \rightarrow Ki(x))$
$(\forall x)\ (M(x) \rightarrow Lim(x))$
$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow Lis(x))$
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow Si(x))$
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow 15cm(x))$
$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow Re(x))$
$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow 2m(x))$
$Ne(tw)$
$La(wo)$

Normalerweise geht man davo aus, daß Subsumptionsgraphen auch noch einer weiteren logischen Bedingung unterliegen. Die unmittelbaren Untertypen eines Typs schließen sich immer gegenseitig aus. In (46) bedeutet dies, daß kein Vogel ein Fisch ist, daß keine Nachtigall ein Strauß ist und daß kein Makrel ein Hecht ist. In prädikatenlogischer Form sehen diese zusätzlichen Bedingungen wie folgt aus:

(52) $(\forall x)\ (V(x) \rightarrow \neg F(x))$
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow \neg S(x))$
$(\forall x)\ (M(x) \rightarrow \neg H(x))$

Manchmal werden Subsumptiongraphen sogar noch strikter interpretiert: Die unmittelbaren Untertypen eines Typs T sind immer als eine exhaustive Klassifikation der Objekte von Typ T zu verstehen. Für (46) und (49) kommt eine solche striktere Interpretation augenscheinlich nicht in Frage, denn sie würde bedeuten, daß Vögel und Fische die einzigen Tiere, Nachtigalle und Strauße die einzigen Vögel sind, usw. (Man könnte sich aber eine besondere Situation vorstellen, in der es nicht um alle Tiere, sondern nur um die geht, die sich in einem gewissen Park befinden. Dann könnte die exhaustive Interpretation wieder stimmen.)

Eine solche strikte Interpretation von (46) führt zu noch weiteren Bedingungen in der prädikatenlogischen Darstellung der im Graphen enthaltenen Information. Die ersten drei sehen wie folgt aus:

(53) $(\forall x)\ (T(x) \rightarrow (V(x) \vee F(x)))$
$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow (N(x) \vee S(x)))$
$(\forall x)\ (F(x) \rightarrow (M(x) \vee H(x)))$

Wenn wir auch die "Subtypierungen" von *Nachtigall* und *Strauß* exhaustiv intepretieren, also daß (in der vom Graphen beschriebenen Situation) Tweety die einzige Nachtigall und Woofy der einzige Strauß ist, dann bedürfen wir zur prädikatenlogischen Darstellung dieser Fakten allerdings ein zusätzliches Symbol, das Symbol = für die Identität. (Wir kommen noch ausführlich auf die Rolle dieses Symbols in der Prädikatenlogik zurück). Mit Hilfe von = können wir die letzten beiden Bedingungen in der Prädikatenlogik wie folgt ausdrücken:

(54) $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow x = tw)$

$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow x = wo)$

Die Annahme, daß die Töchter eines gegebenen Mutterknotens[10] in einemSubsumtionsgraph zusammen eine vollständige Subklassifizierung des vom Mutterknoten repräsetierten Konzepts darstellen, ist ein Beispiel einer sogenannten *Closed World Assumption*. "Closed World Assumptions" sind Annahmen, die sich auf Repräsentationen gewisser Sachverhaltskomplexe beziehen. Im allgemeinen sind Repräsentationen eines Sachverhaltsbereiches (oder einer Situation oder begrenzten Welt - daher der Ausdruck) unvollständig - nur ein Teil der Information ist bekannt, oder beschränkt man sich etwa auf das gerade Relevante. Manchmal ist aber auch die Repräsentation in bestimmter Hinsicht aussschöpfend. Z. B kann eine Beschreibung dessen, was die Gäste eines Restaurants während eines Abends gegessen haben, die Menge der Gäste vollständig beschreiben - jeder Gast ist in der Beschreibung erwähnt - obwohl nur eine unvollständige Beschreibung dessen vorliegt, was die Gäste alle bestellt haben. Im Allgemeinen ist es wichtig, zu wissen, in welcher Hinsicht die repräsentierten Informationen vollständig sind, weil daraus vielleicht wichtige Schlüsse gezogen werden können. (Z. B. kann auf Basis der Closed World Assumption, daß alle Gäste repräsentiert sind auch bei unvollständigr Beschreibung dessen, was bestellt wurde, eine Untergrenze dafür berechnet werden, wieviel im Durchschnitt pro Person bestellt wurde.).

Die durch Subsumptionsgraphen lizensierten Vererbungsinferenzen weisen eine enge formale Ählichkeit mit den Inferenzmustern der Syllogismuslehre auf. Zuerst gibt es die Inferenzen, die ausschließlich auf die Transitivität der Subsumptionsrelation beruhen: Z.B. Tier subsumiert Vogel und Vogel subsumiert Strauß, also subsumiert Tier auch Strauß. In syllogistischer Terminologie:

---

10 Subsumptiongraphen sind *gerichtete* Graphen - Graphen, in denen die Kanten nicht nur Knoten verbinden, sondern auch eine "Richtung" haben: eine Subsumptionskante von einem Knoten K1 (dem subsumierenden Knoten) nach einem subsumierten Knoten K2 bedeutet natürlich nicht dasselbe wie die umgekehrte Kante von K2 nach K1 bedeuten würde; z.B. ist die Behauptung, daß *Tier Vogel* subsumiert nicht dieselbe wie die Behauptung daß *Vogel Tier* subsumiert.

Bei gerichteten Graphen ist es üblich, von einem Knoten und den von ihm aus direkt über Kanten erreichbaren Knoten bestehen, zu sagen, der erste Knoten sei der *Mutterknoten* und die von ihm aus direkt erreichbaren Knoten seien die *Töchterknoten*. Töchter eines und desselben Mutterknotens werden oft auch *Schwestern* genannt. Also sind z.B. in (46) Vogel und Fisch die Töchter des Knotens Tier, und ist dieser der Mutterknoten des Teilgraphs, der nur aus diesen drei Teilen besteht.

(55) Alle Strauße sind Vögel
Alle Vögel sind Tiere.
Also: Alle Strauße sind Tiere

In der Prädikatenlogik sieht dieses Inferenzmuster, wie wir schon gesehen haben, wie folgt aus:

(56) $(\forall x)\ (S(x) \rightarrow V(x))$,
$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow T(x))$
$\vdash (\forall x)\ (S(x) \rightarrow T(x))$

Formal identisch sind Vererbungsinferenzen, die Merkmalszugehörigkeit von einem Mutterknoten auf einen Tochterknoten übertragen. Beispielsweise können wir in (49), aufgrund der Tatsache, daß das Merkmal "hat Flügel" mit dem Knoten *Vogel* assoziiert ist, schließen, daß dieses Merkmal auch auf die Tochterknoten von *Vogel*, also *Nachtigall* und *Strauß*, anwendbar ist. Diese Inferenzen sind vom selben Muster wie (56); z. B.:

(57) $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow V(x))$,
$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow Flü(x))$
$\vdash (\forall x)\ (N(x) \rightarrow Flü(x))$

Werden Schwestern als sich gegenseitig ausschließend interpretiert, so ergeben sich daraus weitere Vererbungsinferenzen, die sich von den bisherigen durch die Präsenz der Negation unterscheiden. Aus der Behauptung, daß Vögel keine Fische, und der Behauptung, daß Nachtigalle Vögel sind, folgt, daß Nachtigalle keine Fische sind; oder:

(58) Jede Nachtigall ist ein Vogel.
Kein Vogel ist ein Fisch.
Also: Keine Nachtigall ist ein Fisch

Sätze mit dem Wort *kein* lassen sich im Prädikatenkalkül auf zwei verschiedene Arten darstellen, entweder nach dem Prinzip, daß "Kein A ist B" dasselbe bedeutet wie "Es ist nicht der Fall, daß es ein x gibt, das sowohl ein A alas auch ein B ist." oder nach dem Prinzip, daß "Kein A ist B" gleichbedeutend ist mit "Für jedes x, das ein A ist, ist es nicht der Fall, daß x ein B ist." Wir geben die beiden Formalisierungen von (58) in (59.i) und (59.ii).

(59) (i) $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow V(x))$,
$\neg\ (\exists x)\ (V(x)\ \&\ F(x))$
$\vdash\ \neg\ (\exists x)\ (N(x)\ \&\ F(x))$

(ii) $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow V(x))$,
$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow \neg\ F(x))$
$\vdash\ (\forall x)\ (N(x) \rightarrow \neg\ F(x))$

Wie wir später sehen werden, sind beide Argumente (59.i,ii) formal gültig.

Es gibt außer der zuerst beschriebenen Basisinterpretation von Subsumptionsgraphen und den anschließend diskutierten strikteren Interpretationen auch eine schwächere, nach der die von den Merkmalsassoziierungen vermittelten Implikationen nicht absolut gelten, sondern Ausnahmen zulassen. Diese untescheidet sich von den bisher diskutierten nur in der Interpretation der Merkmale; also konzentrieren wir uns auf (49).

Oft ist es so, daß ein Merkmal M zwar für einen Typ T charakteristisch ist, daß aber dennoch nicht alle Exemplare von T M haben. Z.B. haben Vögel normalerweise Flügel, aber das schließt nicht aus, daß es einzelne Vögel gibt, denen man die Flügel abgeschnitten hat. Ebenfalls gibt es Vögel, die, aus diesem oder anderem Grund, nicht fliegen können. Es gibt sogar ganze Vogelarten, die unfähig sind, zu fliegen, wie der Srauß oder der Pinguin. (Strikt gesprochen gibt es mehrere Pinguinarten, die alle nicht fliegen können.)

Der Umstand, daß viele Merkmale nur im "Normalfall" auf bestimmte Klassen zutreffen, aber daß es dazu auch immer wieder Ausnahmen geben wird, hat zur Folge, daß die meisten Inferenzen, die wir im täglichen Leben ziehen, nicht "wasserdicht" sind. Sie gelten nur unter der Annahme, daß wir es nicht mit einem Ausnahmefall zu tun haben; und sehr oft läßt sich das nicht einwandfrei feststellen - zumindest nicht in der uns verfügbaren Zeit. Systeme der Künstlichen Intelligenz, die ihre Überlegungen und Entscheidugnen meist auf den selben Informationen basieren müssen, die auch wir in ähnlichen Fällen verwenden, müssen ebenfalls von solchen nicht "wasserdichten" Inferenzen Gebrauch machen. Denn sonst würden ihnen die notwendigen Informationen unzugänglich bleiben. Wie eine Logik aussehen soll, die die Risiken solcher Inferenzverfahren minimiert, während sie doch genug von den nur über solche Inferenzen zu gewinnenden Schlüsse erlaubt, ist ein Problem, für das es immer noch keine ganz befriedigende Lösung gibt. Es gibt aber eine beträchtliche Anzahl von Vorschlägen, die sich auf Sonderfälle des allgemeinen Problems beschränken. Unter ihnen gibt es insbesondere mehrere, die sich auf die Verwendung von Subsumptionsgraphen beziehen.

Unser Beispiel (49) eignet sich gut dazu, das Problem und den erwähnten Lösungsansatz zu erklären. In seiner bisherigen Interpretation enthält der Graph mindestens eine Information, die faktisch inkorrekt ist. Der Graph besagt, daß alle Vögel fliegen können und daß all Strauße Vögel sind. Das kann so nicht stimmen, denn wie wir wissen, können Strauße nicht fliegen (und dies wird voraussichtlich auch für den einzigen Strauß der Fall sein, von der im Graphen die Rede ist, für den launischen Woofy. Sollte diese Ungereimtheit nicht direkt aufgfallen sein, so ist das vermutlich der Tatsache zu verdanken, daß die lokale Informationen im Graph uns ganz natürlich vorkommen. *fliegen können* ist ein Konzept, das wir typisch mit Vögeln assoziieren, gleichzeitig wissen wir, daß der Strauß ein Vogel ist. Aber er gilt uns als eine eher ausgefallene Vogelart, deren Marginalität sich gewissermaßen auch in ihrem Nicht-Fliegen können zeigt. Deshalb läßt sich in diesem Fall, so urteilen wir quasi von selbst, das Merkmal "fliegen können" nicht auf den Untertyp übertragen.

Um solchen Intuitionen gerecht zu werden, wird erlaubt, Merkmalsinformationen in den Subsumptionsgraph einzutragen, die sich nach der bisherigen Interpretation regelrecht widesprechen. Zum Beispiel können wir nach dieser neuen Interpretation von Subsumptionsgraphen das Merkmal *nicht fliegen können* mit dem Knoten Strauß assoziieren. Nach der bisherigen Deutung würde das impizieren, daß es sowohl der Fall ist, daß jeder Strauß fliegen kann, als auch, daß er nicht fliegen kann, insbesondere würden wir schließen, daß Woofy fliegen kann und daß er nicht fliegen kann, ein unverkennbarer logischer Widerspruch.

Aus der neuen Interpretation von Subsumptionsgraphen, die wir jetzt explizieren werden, ergibt sich dieser Widerspruch nicht. Nach dieser Interpretation können die mit höheren Knoten assoziierten Merkmale von weiter unten vorkommenden Merkmalen "überschrieben", das heißt, lokal außer Kraft gesetzt, werden. In der folgenden Variante (60) vom (49) verhält es sich so mit den Merkmalen *kann fliegen* und $\neg$ *(kann fliegen)*:

(60)

hat eine Haut
Tier ernährt sich
atmet

hat Flügel
Vogel
hat Federn
kann fliegen

hat Flossen
Fisch
hat Kiemen

singt
Nachtigall
bis zu
17 cm

rennt
Strauß
bis zu
2.4 m.
¬(kann flieg.)

Makrele
lebt im
Meer

Hecht
lebt in
Süßwasser

Tweety nett Woofy launisch

In (60) überschreibt das mit *Strauß* assoziierte Merkmal ¬*(kann fliegen)* das mit *Vogel* assoziierte *kann fliegen*. Dagegen ist auf *Nachtigall*, das nicht mit einem überschreibendem Merkmal versehen ist, das Merkmal *kann fliegen* des Mutterknotens übertragbar.

Auf diese Weise kann explizit gemacht werden, auf welche Subtypen eines gegebenen Typs T mit T verbundene Merkmalsinformationen vererbt werden und auf welche nicht. Wird ein Merkmal weiter unten explizit verneint, so gilt das Merkmal dort nicht; gibt es keine Verneinung, dann bleibt das Merkmal für den Subtyp erhalten. Nach diesem Prinzip folgt also insbesondere aus (60), daß der Subtyp *Nachtigall* von *Vogel* das Merkmal *kann fliegen* besitzt, während der Subtyp *Strauß* das gegenteilige Merkmal ¬*(kann fliegen)* hat.

Genau wie mit solchen "Subsumptionsgraphen mit Merkmalsüberschreibung" deduktiv umzugehen ist, ist eine überraschend komplizierte Frage, die wir nicht in ihren Einzelheiten verfolgen wollen. Wir beschränken uns hier lediglich auf die "harten", nicht überschreibbaren und somit einwandfrei gültigen Inferenzen, die man aus einem solchen Subsumptionsgraph ziehen kann. Dazu gehen wir wieder exemplarisch vor, indem wir uns nochmal auf unser Beispiel (60) konzentrieren.

Die Frage, genau welche Informationen in (60) enthalten sind, hängt mit den oben diskutierten "closed world"-Annahmen zusammen, nach denen die Töchter eines gegebenen Mutterknotentyps eine exhaustive Unterteilung von T geben. Gelten diese Annahmen, dann kann man den "Subsumptionsgraphen mit Überschreibung" G in einen Subsumptionsgraphen G' transformieren, der nach den bisherigen Prinzipien zu interpretieren ist und der die nicht-überschreibbare Informationen des ersten Graphen enthält. Die Konstruktion von G' aus G verläuft von unten nach oben. Wir übernehmen die Knoten von G zusammen mit den assoziierten Merkmalen, aber mit der folgenden Ausnahme: wenn das Merkmal M des gerade betrachteten Knotens T von Merkmalen überschrieben wird, die mit unterhalb von K liegenden Knoten T1, ...Tn assoziiert sind, dann ersetzen wir die Assoziation von M mit K durch das disjunktive Merkmal " T1 v ... v Tn v M. Im Fall von (60), in dem es nur eine Überschreibung gibt, hat die Ausnahme nur einen Effekt auf den Knoten*Vogel* . Hier wird das Merkmal *kann fliegen* durch das Merkmal *Strauß* v *kann fliegen* ersetzt. Insgesamt sieht die Übersetzung von (60) folgendermaßen aus:

(61)

hat eine Haut
Tier ernährt sich
atmet

hat Flügel | hat Flossen
Vogel | Fisch
hat Federn | hat Kieme
(Strauß v
kann fliegen)

singt rennt
Nachtigall Strauß Scholle Hecht
bis zu bis zu lebt im lebt in
17 cm 2.4 m. Meer Süßwasser
¬(kann flieg.)

Tweety nett Woofy launig

Sind die *closed world assumptions* nicht gegeben, dann ist eine solche Übersetzung zwar ebenfalls möglich, aber sie führt nicht notwendig zu einem Graphen, der nur einwandfrei korrekte Information enthält.

Denn gilt z.B. die *closed world assumption* nicht bzgl. der Unterteilung von *Vogel* in *Nachtigall* und *Strauß*, dann ist aus den Merkmalsmengen der Tochterknoten nicht mehr zu erkennen, ob der Strauß in der Tat die einzige Ausnahme zu dem Prinzip bildet, daß Vögel fliegen können. Ohne die *closed world assumption* ist es nach (60) möglich, daß es neben der Nachtigall und dem Strauß noch andere Typen von Vögeln gibt, und unter diesen sonstigen Vogeltypen könnte es weitere geben, für die das Markmal *kann fliegen* nicht gilt (Pinguine, Emus, Dodos usw.). Deshalb kann man sich auf die Merkmalsassoziierung in (61), nach der jeder Vogel einweder ein Strauß ist oder fliegen kann, nicht unbegrenzt verlassen. In Subsumierungsgraphen mit Überschreibung, in denen die *closed world assumptions* incht gegeben sind, läßt sich der präzise Gehalt der Merkmalsassoziierungen nicht einwandfrei feststellen.

##

Auch innerhalb der Linguistik und Computerlinguistik werden zunehmend Aspekte sprachlichen Wissens in der Form von Hierarchien mit Überschreibung kodiert. Zum einen beruht diese Praxis auf der Überzeugung, daß auch der Mensch dieses Wissen in einer solchen Form peichert und verarbeitet, zum anderen ist sie durch die große Verarbeitungseffizienz von Konzepthierarchien im Rechner motiviert.

Konzepthierarchien werden insbesondere für die Speicherung lexikalischer Information verwendet: Das Lexikon, oder ein Teil davon wird als Konzepthierarchie dargestellt, in der es u.a. "Konzepte" für die typischen Wortklassen, wie *Verb, Nomen, Adjektiv, Adverb, Präposition*, usw gibt.. Überschreibung spielt in solchhen Hierarchien meist auch eine wichtige Rolle. Zum Beispiel wird oft mit der Kategorie *Verb* die morphologischen Eigenschaften schwacher Verben als Merkmale assoziiert, wie z.B. die Eigenschaft, daß das Präteritum durch Affizierung von "-te" oder -de" entsteht (abhängig von dem letzten Buchstaben des Stammes); denn diese Merkmale entsprechen bei den Verben dem "Regelfall". Für weiter unten in der Hierarchie erwähnte starke Verben müssen diese Merkmale dann aber wieder überschrieben werden. Eine besonders gut ausgearbeitete Kodierungsmethode für solche Informationen, die insbesonere auch effizienten Zugriff und Verarbeitung erlaubt, ist das von Gazdar und seinen Mitarbeitern entwickelte System DATR. (Siehe z.B. Gazdar &??).

Ein Beispiel eines Teils einer solchen lexikalischen Hierarchie ist (62). Der hier verwendeten Kodierung mangelt es jedoch an Eleganz und Ökonomie, da die Begriffe "transitiv", "intransitiv", "Verbum Dicendi" und "Bewegungsverb" mehrfach als Knoten auftreten. Intuitiv ist die Klassifizierung von Verben bezüglich der Frage, ob sie transitiv oder intransitiv sind, unabhängig von der Frage, ob sie stark oder schwach sind, und dasselbe gilt für die semantische Klassifizierung als Verba Dicendi ( = "Verben des Sagens"), Bewegungsverben, Einstellungsverben (wie *glauben, hoffen, beabsichtigen, überraschen*), Besitzwechselverben (wie s*chenken, nehmen, tauschen, kaufen, berauben*) usw. Um dieser Multidimensionalität der Klassifizierung auf natürliche Art und Weise gerecht zu werden, brauchen wir *multi-dimensionale* Konzepthierarchien. In einer multi-dimensionalen Hierarchie ist es möglich, etwa die Konzepte "schwach", "transitiv" und "Bewegungsverb" als nebengeordnet einzutragen und dann z.B. das Verb *überqueren* als jedem dieser drei Konzepte untergeordnet darzustellen, während *ansprechen* als dem Konzept "transitiv", aber nicht den beiden andern Konzepten untergeordnet wird. (Statt dessen ist *ansprechen* den Begriffen "stark" und "Verbum Diocendi" untergeordnet. Eine solche Hierarchie ist (so gut, wie es ein zwei-imensionales Blatt Papier bescheidenen Formats zuläßt) in (63) dargestellt

**<u>Aufgabe</u>**: Übertragen Sie die in (63) enthaltene Information in den monadischen Prädikatenkalkül.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Formalisierung im Prädikatenkalkül von (62).

In einer Hierarchie wie (63) gilt offenbar nicht länger das Prinzip, nach dem zwei nebengeordnete Begriffe sich gegenseitig ausschließen. Zum Beispiel gibt es gemeinsame Instanziierungen von "schwach" und "Bewegungsverb", usw. Dennoch gilt das Exklusionsprinzip immer noch beschränkt, und zwar innerhalb einer und derselben "Klassifikationsdimension". Zum Beispiel schließen sich die Begriffe "schwach" und "stark" gegenseitig aus, und dasselbe gilt für "transitiv" und "intransitiv", und für "Verbum dicendi" und "Bewegunsgverb".

In dieser Hinsicht sind sich diese drei Klassifikationsdimensionen ähnlich. Es gibt zwischen ihnen aber dennoch einen Unterschied. Die beiden ersten sind als *exhaustiv* zu betrachten: außer "transitiv" und "intransitiv" gibt es keine weiteren Optionen, und dasselbe gilt für "schwach" und "stark". Dagegen sind die Begriffe "Verbum Dicendi" und "Bewegunsgverb" als Teil einer viel größeren Menge von semantisch unterschiedlichen Verbtypen zu betrachten. In dieser Dimension gilt das Ausschlußprinzip also nicht.

<u>**Aufgabe**</u>: Formulieren Sie die im letzten Absatz erwähnten zusätzlichen Informationen über Ausschlußbedingungen, die man (63) entnehmen könnte.

(62) **Wort** besteht aus einer endlichen Anzahl von Buchstaben

**Verb** Präteritum = **Nomen**
**Adjektiv** **.....**
Stamm + t + Infl

erfordert
Subjekt

**Schwach**
**Stark**

**Intrans.** **Trans** erfordert
**Intrans.** **Trans.**
dir. Obj.

**Verbum Bewe- ... Verb. Bew. Verb.**
**Bew. Verb. Bew.**
**Dicendi gungsv. Dic. Dic.**
**Dic.**

*reden* *radeln* *anreden* *über-* *sprechen* Prät. =
*fahren* *an-* *über-*
*queren* *sprach* + Infl
*sprechen* *fahren*

Prät. = Prät. =

*fuhr* + Infl *ansprach* + Infl

(63) **Wort** besteht aus einer
endlichen Anzahl
von Buchstaben

**Verb** Präteritum = **Nomen**
**Adjektiv** **.....**
Stamm + t + Infl

erfordert
Subjekt

**Schwach** **Stark** **Intrans.** **Trans** erfordert
**Verbum** **Bewe-**
direktes Obj.
**Dicendi** **gungsv.**

*reden* *radeln* *anreden* *über-* *sprechen* Prät. =
*fahren* *an-* *über-*
*queren* *sprach* + Infl
*sprechen* *fahren*

Prät. = Prät. =

*fuhr* + Infl *ansprach* + Infl

## Mengenlehre (Anfang).

Einer der wichtigsten Begriffe der Logik und der Grundlagen der Mathematik ist der einer *Menge*. Mathematik ohne Mengen ist heute geradezu undenkbar. Viele Behauptungen der modernen Mathematik ließen sich gar nicht erst formulieren, sollte man auf Mengen verzichten müssen, andere bekämen eine sehr viel umständlichere und undurchsichtigere Formulierung. Auch außerhalb der reinen Mathematik wird oft von Mengen Gebrauch gemacht, z. B. bei statisischen Überlegungen: Wie verhält sich die Menge der Arbeitslosen in Deutschland im Juni zu der Menge der Arbeitslosen im Mai? usw.

Darüberhinaus gibt es noch einen weiteren Grund, weshalb Mengen innerhalb der Logik und mathematischen Grundlagenforschung einen besonderen Stellenwert besitzen. Seit dem späten 19-en Jahrhundert hat es innerhalb der Mathamatik ein Bestreben gegeben, die gesamte Mathematik auf Basis von sehr einfachen, und deshalb als widerspruchsfrei erkennbaren Grundannahmen zu entwickeln. Der vielleicht einflußreichte Ansatz, zu dem dieses Bestreben geführt hat, beseht darin, alle mathematische Objekte - Zahlen, Funktionen, Differentialgleichungen, Vektoren, geometrische Figuren, usw. - als Mengentheoretische Objekte (also als Mengen besonderer Art) darzustellen. Zwar glauben heutzutage nicht viele Mathematiker one Vorbehalt an dieses Reduktionsprogramm, aber es ist dennoch sehr einflußreich gewesen und hat innerhalb von Logik und Grundlagenforschung Spuren hinterlassen, die keiner übersehen kann. Insbesondere verdanken wir dem Programm eine Anzahl von elementaren Konstruktionen, die in den allgemeinen mathematischen Diskurses eingegangen sind und auf die auch im Rahmen dieses Kurses nicht verzichten werden kann.

Wir kommen also an der Frage: "Was sind Mengen?" nicht vorbei. Bevor wir sie aber beantworte können, sollten wir uns klar machen, was sie genau bedeutet. Und da empfielt sich, wie in vielen anderen Fällen von Begriffserläuterung, die folgende Unterscheidung. Einerseits kann man die Frage als eine Frage nach der "Identität" von Mengen verstehen. Damit ist folgendes gemeint. Wenn ich mit zwei verschiedenen Beschreibungen von Mengen konfrontiert werde, nach welchen Kriterien soll ich entscheiden, ob sie Beschreibungen von ein und derselben Menge oder von zwei verschiedenen Mengen sind? Was gibt den Ausschlag dafür, ob es sich um eine oder zwei Mengen handelt?

Die zweite Interpretation userer Ausgangsfrage ist: "Was gibt es alles für Mengen? Wie groß ist die "Menge" aller Mengen? Was gehört alles dazu? Hier geht es nicht darum, welche Mengenbeschreibungen Bescheibungen von einer einzigen und welche Beschreibungen von zwei Mengen sind, sondern wann eine Beschreibung überhaupt eine Menge beschreibt.

Weder die eine noch die andere dieser beiden Fragen läßt sich beantworten, wenn wir uns ausschließlich auf unsere Intuitionen verlassen. In beiden Fällen wird unsere Antwort ein Element der Stipulation enthalten. Das bedeutet nicht, daß unsere Intuitionen irrelevant sind. Insofern sie klar sind, sollte die Antwort damit übereinstimmen. Aber die Antwort vollends bestimmen werden sie nicht.

Die allgemein akzeptierete Antwort auf die erste Frage ist recht einfach: Die Identität einer Menge wird einzig dadurch bestimmt, aus welchen Elementen sie besteht. Mit anderen Worten, die Mengen A und B sind nur dann voneinander verschieden, wenn es etwas gibt, das Element von A ist aber nicht von B oder etwas, das Element von B ist aber nicht von A. Wir können dieses Prinzip - es ist unter dem Namen *Extensionalitätsprinzip* bekannt- auch wie folgt formulieren:

> Wenn A und B Mengen sind, dann ist A identisch mit B, wenn jedes Element von A Element von B und jedes Element von B Element von A ist.

Natürlich gilt umgekehrt trivial, daß, wenn A und B identisch sind, dann auch jedes Element von A Element von B ist (denn B ist ja dassellbe wie A!) und umgekehrt jedes Element von B ein Element von A. Deshalb können wir in der obigen Formulierung des Extensionalitätsprinzips das "wenn" durch "genau dann wenn" ersetzen. Damit kommen wir zu der Satndard-Formulierung des Prinzips:

(Extensionalitätsprinzip für Mengen)

> Wenn A und B Mengen sind, dann ist A identisch mit B genau dann, wenn jedes Element von A Element von B und jedes Element von B Element von A ist.

Wir geben das Prinzip gleich auch in der Gestalt einer Formel. Dabei greifen wir vor, insofern die Formel zum allgemeinen Prädikatenkalkül gehört, den wir erts im nächsten Kapitel explizit einführen. Das ist zwar ein bischen unsystematisch, macht die in diesem Abschnitt zu diskutierenden Prinzipien aber, glauben wir, leichter verständlich.

In den prädikatenlogischen Formeln verwenden wir das Prädikat M als Abkürzung für "Menge" und den griechischen Buchstaben ε als Bezeichnung der Beziehung "ist Element von" - "x ist Element von A" wird also repräsentiert als "x ε A"

(Extensionalitätsprinzip für Mengen; formal)

$$(\forall A)\{\forall B)\ ((M(A)\ \&\ M(B) \rightarrow (A = B \leftrightarrow (\forall x)(\ x\ \varepsilon\ A \leftrightarrow\ x\ \varepsilon\ B)))$$

Das Extensionalitätsprinzip mag auf den ersten Blick wie eine reine Banalität anmuten. Worin könnte die Identität einer Menge denn sonst bestehen?" könnte man geneigt sein, zu fragen. Daß die Sache aber ganz so einfach nicht ist, wird deutlich, wenn wir den Mengenbegriff mit dem einer Eigenschaft vergleichen. Betrachten wir eines der klasssischen Beispiele, die immer wieder von Philosophen benutzt werden, um den Unterschied zwischen Mengen und Eigenschaften zu illustrieren. Die Eigenschaft, ein Organismus zu sein, der ein Herz hat, ist intuitiv nicht dieselbe Eigenschaft wie die, ein Organismus zu sein, der Nieren hat. Um zu verifizieren, ob eine Kreatur die erste Eigenschaft besitzt, muß man feststellen, ob sie ein Herz besitzt; um zu verifizieren, ob sie die zweite Eigenschaft hat, muß man sie auf Nieren überprüfen. Das sind unterschiedliche Verfahren, die im Prinzip zu unterschiedlichen Ergebnissen führen könnten. Es könnte ja Kreaturen geben, die ein Herz aber keine Nieren haben, oder umgekehrt - oder, wie die Philosophen es oft ausdrücken, es sind mögliche Welten vorstellbar, in denen es solche Kreaturen gibt.

Dennoch gibt es in der realen Welt keine Kreaturen, die ein Herz aber keine Nieren haben oder umgekehrt. (Dies hängt wohl mit der historischen Entwicklung des zoologischen Lebens auf Erden zusammen, in der das System von Kreislauf und Wasserausscheidung irgendwann als Gesamtpaket genetisch realisiert wurde.) Also ist jedes Element der Menge aller Organismen mit einem Herzen auch Element der Menge aller Organismen mit Nieren und umgekehrt, und damit sind die Mengen, im Gegensatz zu den beiden Eigenschaften, miteinander identisch. Fazit:

(i) die Identität einer Menge ist ausschließlich dadurch bestimmt, welche Elemente sie enthält;
(ii) die Identität einer Eigenschaft ist *nicht* vollends dadurch bestimmt, welche Dinge die Eigenschaft haben.

Unsere zweite Frage - Was für Mengen gibt es alles? - ist nicht so einfach zu beantworten wie die erste. Wir können zwar versuchen, anzugeben, was für Mengen es geben soll, aber wie könnten wir uns davon überzeugen, daß wir damit alle Mengen erfaßt haben, die es tatsächlich gibt? Vielleicht ist diese Ziel zu hoch gesteckt und sollen wir uns mit einer partiellen Antwort zufriedengeben, die einen genügend umfangreichen Teilbereich der Gesamtheit aller Mengen identifiziert, in der zumindest all die Mengen vorkommen, die für die verschiedenen Zwecke innerhalb und außerhalb der Mathematik gebraucht werden.

Für diese Teilantwort reicht es aus, Prinzipien zu formulieren, mit deren Hilfe Mengen definiert oder erzeugt werden können. Das folgende Prinzip scheint besonders nahe zu liegen: Jede Eigenschaft P bestimmt eine Menge - die Menge aller Dinge, die die Eigenschaft haben. Diese Menge wird die *Extension* der Eigenschaft P genannt. Wir werden das Prinzip selbst das *Komprehensionsprinzip* nennen.

In dieser Formulierung läßt sich mit dem Prinzip allerdings nicht viel anfangen. Es verschiebt die Frage nach der Existenz von Mengen auf die Existenz von Eigenschaften: Was gibt es alles für Eigenschaften? Konkreter wird das Prinzip, wenn wir es direkt auf Eigenschaftsausdrücke beziehen - auf sprachliche Ausdrücke also, mit denen wir Eigenschaften beschreiben. Jede Sprache verfügt über eine unbegrenzte Anzahl solcher Ausdrücke. Auf Deutsch z.B. verwendet man u.a.*Verbalphrasen* zu diesem Zweck - Satzteile wie *ist kahl*, *ist Orthopäde*, *ist ein rotes funkelnagelneues Auto*, *riecht komisch*, *hat sich in Mathilde verliebt*, *wird allgemein als der größte Dumkopf der gesamten Nachbarschaft betrachtet*, *betrinkt sich auf jeder Party, zu der auch seine frühere Geliebte Fifi erscheint*, usw. Leider sind natürliche Sprachen für die Zwecke der Logik und Grundlagenforschung viel zu unpräzise - in ihrer Syntax und noch mehr in ihrer Semantik - und als Ausgangspunkt für eine präzise Fassung des Komprehensionsprinzips kommen sie deswewgen nicht in Betracht. Was wir brauchen, ist eine formale Sprache, für die Syntax und Semantik genau spezifiziert sind.

Es war Gottlob Frege, der als erster versucht hat, das Komprehensionsprinzip in diesem Sinne explizit zu machen. Ihm verdanken wir das erste ernsthafte Projekt verdanken, einen bedeutenden Teil der Mathematik (die Arithmetik der ganzen Zahlen) auf einer rein logischen Basis strikt formal zu entwickeln. Frege erfand im Rahmen dieses Projekts eine allgemeine formale Logiksprache - sie enthielt die heutige Prädikatenlogik als Teilsprache; Frege wird daher zurecht als der Urheber der Prädikatenlogik betrachtet - und interpretierte das Komprehensionsprinzip in Bezug auf die Bedingungen, die in dieser Sprache formuliert werden können: Zu jeder Formel A(x) der Sprache, die freie Vorkommen der Variable x enthält, gibt es nach dieser Interpretation eine Menge {x: A(x)}, die aus genau den Objekten besteht, die die Bedingung A(x) erfüllen.

Was für Mengen durch eine solche Version des Komprehensionsprinzips erzeugt werden, hängt natürlich von der gewählten Sprache ab. Ist sie ausdrucksarm , so generiert das Prinzip auch nur entsprechend wenige Mengen; bei ausdrucksreicheren Sprachen wird die Gesamtheit der erzeugten Mengen entsprechend zunehmen. Damit die für verschiedene Zwecke notwendigen Mengen verfügbar sind, muß sichergestellt werden, daß die Sprache ausdrucksstark genug ist. In der formalen Sprache, die Frege für seine Ziele brauchte - auf seine Gründe einzugehen, würde hier zu weit führen - lassen sich sehr viele Bedingungen formulieren. Und gerade dies war für das Unternehmen verhängnisvoll. Denn die von ihm verwendete Sprache erlaubt die Definition von Mengen, die es gar nicht geben kann. Daß dem so ist, wurde kurz vor dem Erscheinen von Freges Hauptwerk, *die Grundgesetze der Arithmetik*, von dem englischen Logiker unf Philosophen Bertrand Russell entdeckt. Das von ihm entdeckte Problem mutet fast einfältig an, zumindest in der Form, in der es sich heutzutage darstellen läßt. (Innerhalb vom System der Fregeschen Grundgesetze war es nallerdings nicht so leicht zu erkennen.) Es ergibt sich aus zwei Merkmalen der Fregeschen Formalsprache: (i) eines der Prädikate dieser Sprache ist das zweistellige Prädikat ("ist Element von"); (ii) die Variablen der Sprache stehen für alle möglichen Objekte, im weitestmöglichen, allumfassenden Sinne. Dies bedeutet unter anderem, daß in einer Formel wie "x ε y" beide Variablen als Mengen interpretiert werden können, also läßt sich x ε y" als "die Menge x ist ein Eelement der Menge y" interpretieren. Genauso können wir auch die Formeln "x ε x" und "¬ (x ε x)" bilden und sie als "die Menge x ist (nicht) Element von sich selbst" interpretieren. Diese Formeln sind beide von der Form A(x) und sollten also nach dem Komprehensionsprinzip entsprechende Mengen bestimmen. Eine Entität a wird die erste Formel dann erfüllen, wenn a Element von a ist. Dies bedeutet also , daß a eine Menge sein muß (denn sonst könnte es nicht als zweites Argument einer Beziehung "ist Element von" auftreten) und daß diese Menge a sich selbst als Element enthält. Ähnliches gilt für die zweite Formel "¬ (x ε x)". Diese Formel wird von einem Objekt a erfüllt, wenn es nicht der Fall ist, daß a eine Menge ist die sich selbst als Element enthält.

Betrachten wir nun die Menge X, die das Komprehensionsprinzip aus dieser letzten Formel erzeugt; also ist X die Menge $\{x: \neg (x \in x)\}$. Bezüglich X können wir die Frage stellen: Ist X in sich selbst als Element enthalten? Wir sehen dann schnell, daß diese Frage sich nicht kohärent beantworten läßt. Denn nehmen wir an, die Antwort wäre positiv, dann würde X die Formel "$x \in x$" erfüllen und somit die Formel "$\neg (x \in x)$" nicht erfüllen. Dann würde X kein Element von der durch "$\neg (x \in x)$" bestimmten Menge sein, mit anderen Worten, X ist kein Element von X. Dies widerspricht der positiven Antwort, von der wir ausgingen, also widerspricht diese sich selbst. Sie muß also falsch sein und wir sehen uns zu dem Schluß gezwungen, daß nur eine negative Antwort auf die Frage möglich ist. Also X ist kein Element von X. Das bedeutet nun aber, daß X die Formel "$\neg (x \in x)$" doch erfüllt, und daraus folgt, daß X der von dieser Formel bestimmten Menge, also X, als Element angehört. Also führt auch die negative Antwort zu ihrem eigenen Gegenteil und also ist auch sie widersprüchlich. Die Annahme, daß es so eine Menge wie X gibt, führt also so oder so zu einem Widerspruch. Damit ist die logische Widersprüchlichkeit eines jeden Systems nachgewiesen, das zuläßt, das Komprehensionsprinzip auf die Formel "$\neg (x \in x)$" anzuwenden.

Dieses von Russell entdeckte Argument ist als *Russellsches Paradoxon* bekannt

Auf die Weiterentwicklung von Logik und Grundlagen der Mathematik war die Entdeckung des Russellschen Paradoxons von nachhaltigem Einfluß. Man kann sie geradezu als die Entdeckung des "Unterschiedes zwischen Gut und Böse" betrachten, die zu der Vertreibung aus dem formalen Paradies führte, in dem Logik und Mathematik in schlichter Harmonie koexistieren konnten. Nach diesem "Sündenfall" war alles in dieser Beziehung unverglechlich viel unnatürlicher, unverständlicher, mühseliger. Und so ist es geblieben bis auf den heutigen Tag.

Russells Paradoxon zeigt, daß die Welt der Mengen sehr viel komplizierter ist, als man sich vor seiner Entdeckung noch vorstellen konnte. Aber wie sieht diese kompliziertere Welt genau aus? Das Forschungziel, das sich direkt aus dem Paradoxon ergab - und eines der wichtigsten Forschungziele der Logik und Grundlagenforschung überhaupt - besteht darin, ein konsistentes Bild dieser Welt zu entwerfen, das Widersprüche wie die Russellparadoxie vermeidet. In einem solchen Bild - einer solchen *Theorie* also - muß mindestens eine von den Fregeschen Annahmen, die zu dem paradoxalen Schluß führen, aufgegeben oder abgeschwächt werden, damit dieser und ähnliche

Widersprüche verschwinden. Grundsätzlich gibt es zwei Wege: (i) entweder verabschiedet man sich von dem Komprehensionsprinzip (bzw. es wird abgeschwächt oder eingeschränkt) oder es wird die formale Sprache dahingehend geändert, daß problematische Bedingungen wie "$\neg (x \varepsilon x)$" nicht länger verfügbar sind. Beide Wege hat man in Einzelheiten euntersucht. Russell selbst wählte - in einem monumentalen Versuch, das Fregesche Programm widerspruchsfrei durchzuführen - den zweiten Weg. Die von ihm und seinem Koautor Whitehead entwickelte formale Sprache, die "Theory of Types", hat später zu der Entwicklung sog. "getypter" Sprachen geführt, wie sie bis heute innerhalb der Informatik häufig verwendet werden, einschließlich des auch aus mehreren Teilbereichen der Lingusistik und Computerlinguistik bekannten *getypten Lambda-Kalküls*. In der *Theory of Types* und den auf sie zurückgehenden Formalismen sind Formeln wie "$x \varepsilon x$" ausgeschlossen, weil jede Variable von einem bestimmten Typ ist und gefordert wird, daß die Variable, die hinter dem $\varepsilon$-Symbol steht, nie von demselben Typ sein darf wie der der vor dem $\varepsilon$ stehenden Variable. (Im einfachsten Fall einer syntaktisch korrekten Formel "$x \varepsilon y$" ist x vom Typ eines Objekts und y von dem darauffolgenden Typ, dem der Mengen von Objekten.) "$x \varepsilon x$" muß also inkorrekt sein, weil die Variable x nicht gleichzeitig zwei verschiedenen Typen angehören kann.

Als Theorie der Mengenlehre hat die *Theory of Types* nie überzeugt, weil, wie wir später sehen werden, ihre syntaktichen Einschränkungen eine natürliche Begriffsentwicklung dort zu sehr behindern. Deshalb eignet sich die *Theory of Types* nach heutigen Einsichten kaum als logische Grundlage für die Mathematik

Die heutzutage gängigen Theorien der Mengenlehre gehen alle den ersten Weg. (Es gibt mehrere solche Theorien; für unsere Zwecke sind die Unterschiede zwischen ihnen aber zu vernachlässigen und wir werden sie nicht beachten). In diesen Theorien wird die Essenz der von Frege verwendeten Sprache beibehalten, das Komprehensionsprinzip dafür durch eine Anzahl von schwächeren Prinzipien ersetzt. Genau wie diese Prinzipien aussehen und wie sie zusammen eine große Vielfalt von Mengen garantieren, ist nicht Thema dieses Kurses. (In dem Seminar Logik II werden diese Prinzipien und deren Konsequenzen in Einzelheiten diskutiert.) Hin und wieder wird sich aber diese oder jene Bemerkung zu den Prinzipien nicht vermeiden lassen.

##

Unter den Prinzipien, die das Komprehensionsprinzip ersetzen, gibt es eines, das als eine regelrechte Abschwächung davon verstanden werden kann. Dies ist das sog. *Aussonderungsaxiom.* Es besagt, daß sich aus einer beliebigen Menge X mit Hilfe eines willkürlichen Prädikats A(x) die Teilmenge Y von X bilden läßt, die aus genau den Elementen von X besteht, die A(x) erfüllen. Wir stellen diese Menge Y wie folgt dar:

$$Y = \{x \varepsilon X: A(x)\}$$

Das Aussonderungsaxiom ermöglicht es, innerhalb einer vorgegebenen Menge jede Teilmenge zu bilden, die einer in der verwendeten Sprache ausdrückbaren Bedingung entspricht. In den jetzt folgenden Überlegungen gehen wir stillschweigend davon aus, daß wir innerhalb einer umfassenden Menge U "arbeiten" - "U" steht für "Universum" - also, daß alle von uns betrachteten Mengen Teilmengen von U sind. In diesem Kontext droht von Seiten des Russellschen Paradoxons keine Gefahr, solange wir annehmen dürfen, daß die Teilmenge $Y = \{x \varepsilon U: \neg (x \varepsilon x)\}$ kein Element von U sein kann. Denn ist Y kein Element von U, so folgt natürlich, daß Y kein Element von sich selbst ist. (Denn Y ist eine Teilmenge von U; also wäre, wenn Y Element von Y wäre, Y auch Element von U.) Aus der Annahme, daß Y kein Element von Y ist, folgt nun aber kein Widerspruch. denn diese Annahme bedeutet, daß entweder Y die Bedingung "$\neg (x \varepsilon x)$" nicht erfüllt oder Y kein Element von U ist, und die zweite von diesen beiden Möglichkeiten ist widerspruchsfrei.

Mit dieser Überlegung soll nicht suggeriert sein, daß eine Menge nie eine Teilmenge als Element enthalten kann. Es ist im Gegenteil für bestimmte Anwendungen der Mengenlehre unabdingbar, daß es Mengen gibt, die bestimmte Teilmengen auch als Elemente haben. (Solchen Mengen werden wir demnächst auch begegnen.) Ausgeschlossen in den gängigen Mengentheorien ist nur, daß eine Menge *alle* ihre Teilmengen als Elemente enthält. Insbesondere schließen sie, zum Teil mit recht raffinierten Mitteln, diejenige Teilmengen als Elemente aus, die zu Russell-ähnlichen Paradoxien führen würden.

Mengen, die gewisse Teilmengen auch als Elemente enthalten, sind im allgemeinen nicht so leicht vorstellbar. Deshalb wollen wir uns, indem wir uns mit den einfachsten Grundbegriffen der Mengenlehre vertraut machen, zuerts auf den konzeptuell einfachsten Fall konzentrieren, indem wir von einem aus Objekten (also:Nicht-Mengen) bestehendes "Universum" U ausgehen und nur Mengen betrachten, die Teilmengen von U sind.

##

Der ersten Begriff, den wir einführen, ist die Relation der *Inklusion*, $\subseteq$ . Diese Beziehung besteht zwischen Mengen A und B gdw. jedes Element von A auch Element von B ist:

Def. 1 $\quad A \subseteq B$ gdw. $(\forall x)(x \varepsilon A \rightarrow x \varepsilon B)$

Wenn A und B in dieser Beziehung stehen, sagt man auch: "A ist enthalten in B" oder "B enthält A".

Aus Def. 1 lassen sich ein paar einfache Eigenschaften von $\subseteq$ mühelos ableiten.

Thm.1 $\quad A \subseteq A$, für willkürliche Mengen A.[11]

Beweis. Jedes Element von A ist ein Element von A.

Thm.2 $\quad$ Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subseteq C$.

Beweis. Nehmen wir an, daß $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$. Sei a ein willkürlich gewähltes Element von A. Weil $A \subseteq B$, ist dann nach Def.1 a auch Element von B. Weil $B \subseteq C$, folgt, daß a Element ist von C. Da dies für willkürliches a gilt, folgt $A \subseteq C$.

Thm.3 $\quad (A \subseteq B$ und $B \subseteq A)$ gdw. $A = B$.

Beweis. Von rechts nach links folgt die Implikation aus Thm 1.
Um die Implikation von links nach rechts zu beweisen, nehmen wir an, daß $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Aus $A \subseteq B$ folgt, daß jedes Element von A Element von B ist. Umgekehrt folgt aus $B \subseteq A$, daß jedes Element von B Element von A ist. Also gilt $A = B$ wegen des Extensionalitätsprinzip.

Neben der "schwachen" Inklusion gibt es auch noch eine "starke" Inklusionsbeziehung, auch *strikte Inklusion* genannt. Sie gilt zwischen A und B, wenn einerseits $A \subseteq B$ und andererseits nicht $B \subseteq A$. Wir bezeichnen diese Relation mit dem Symbol $\subset$.

---

[11] Die folgenden Theoreme sind ebenfalls als allgemeine Ausssagen für willkürliche in ihnen erwähnte Menge A, B, C, .. zu verstehen. Von jetzt an werden wir auf die explizite Qualifikation "für willkürliche Mengen.." verzichten.

Def. 2 $A \subset B$ gdw. $(A \subseteq B$ und $\neg (B \subseteq A))$

Thm.4 Wenn $A \subset B$, dann $A \subseteq B$.

Beweis. Unmittelbar aus Def. 2.

Thm.5 $\neg (A \subset A)$

Beweis. Nach Thm. 1 gilt $\neg (A \subseteq A)$. Also gilt, wenn wir in Def. 2 A für B substituieren, das zweite Konjunkt der rechten Seite nicht. Dann muß aber auch die linke seite falsch sein. Also $\neg (A \subset A)$.

Thm.6 Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$, dann $A \subset C$.

Beweis. Nehmen wir an, daß $A \subset B$ und $B \subset C$. Nach Thm. 4 gelten dann auch $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$. Also gilt nach Thm. 2 auch $A \subseteq C$. Aus $A \subset B$ folgt überdies, daß $\neg (B \subseteq A)$. Also gibt es ein a, das Element von B aber nicht von A ist. Da $B \subseteq C$, ist a auch Element von C. Also gibt es ein Element von C, das kein Element von A ist und somit $\neg (C \subseteq A)$. Es folgt, daß $A \subset C$.

Der Beweis von Thm. 6 läßt sich leicht zu Beweisen der folgende, Thm.6 sehr ähnlichen Theoremen modifizieren.

Thm.7 Wenn $A \subset B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subset C$.

Thm.8 Wenn $A \subseteq B$ und $B \subset C$, dann $A \subset C$.

Die nächsten (und letzten) zwei Beziehungen zwischen Mengen, die wir in diesem Abschnitt einführen, sind die der *Überlappung* und der *Nicht-Überlappung* . Die Mengen A und B *überlappen sich*, wenn sie ein Element gemeinsam haben; sie *überlappen sich nicht* - oder, wie man auch sagt, sie *sind disjunkt* - wenn es kein gemensames Element gibt. Für Überlappung verwenden wir das symbol O, für Nicht-Überlappung das Symbol ||.

Def. 3 $A \mathrm{O} B$ gdw. $(\exists x)( x \varepsilon A \ \& \ x \varepsilon B)$

Def. 4 $A \parallel B$ gdw. $\neg(\exists x)( x \varepsilon A \ \& \ x \varepsilon B)$

Das Aussonderungsaxiom garantiert insbesondere die Existenz der leeren Teilmenge von U. Wir erhalten diese Menge, indem wir das Axiom auf eine Bedingung anwenden, die unerfüllbar ist, z.B. auf die Bedingung "$x \neq x$". Die Menge aller Elemente von U, die eine solche Bedingung erfüllen, ist leer, sie hat überhaupt keine Elemente. Aus dem Extensionalitätsprinzip folgt, daß es nur eine solche Menge geben kann. denn gäbe es Mengen A und B, die beide keine Elemente hätten, so wäre, trivialerweise, jedes Element von A Element von B und jedes Element von B Element von A; also wären A und B dieselbe Menge. Überdies ist klar, daß es im Fall der leeren Menge keinen Unterschied macht, von welcher Menge wir bei der Anwendung des Aussonderungsaxiom ausgehen: Die leere Teilmenge von U und die leere Teilmenge von V sind, wiederum wegen des Extensionalitätsprinzips, identisch. Es gibt also insgesamt nur eine leere Menge. Wir nennen diese *die leere Menge*. Sie wird symbolisch dargestellt als $\varnothing$.

Def. 5 $\varnothing$ (die *leere Menge*) ist die Menge mit der Eigenschaft $(\forall x)\ \neg(x \in \varnothing)$.

Die Beweise der folgenden Theoreme werden dem Leser überlassen.

Thm.8 A O B gdw. B O A.
Thm.9 A || B gdw. B || A.
Thm.10 Wenn A O B und $B \subseteq C$, dann A O C.
Thm.11 Wenn $A \subseteq B$ und B || C, dann A || C.
Thm.12 $\varnothing \subseteq A$
Thm.13 A || $\varnothing$
Thm.14 A O A gdw. $\varnothing \subset A$
Thm.15 A || A gdw. $A = \varnothing$

Wir kommen jetzt zu den elementaren Operationen auf Mengen. Zuerst die *Mengenvereinigung* $\cup$. Diese Operation bildet aus Mengen A und B eine neue Menge $A \cup B$, die aus den Elementen von A zusammen mit den Elementen von B besteht. Also

Def. 6 $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

(Wenn wir davon ausgehen, daß A und B beide Teilmengen der vorgegebenen Megne U sind, ergibt sich die Existenz von $A \cup B$ aus dem

Aussonderungsaxiom. Ohne diese Annahme ist die Existenz nicht selbstverständlich und muß sie durch ein zusätzliches Mengenerzeugungsprinzip gesichert werden. Alle gängigen Mengentheorien enthalten ein solches Prinzip.)

<u>Thm.16</u> $A \cup A = A$ (Idempotenz)

<u>Thm.17</u> $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)

<u>Thm.18</u> $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)

<u>Thm.19</u> $A \cup B = B$ gdw. $A \subseteq B$

<u>Thm.20</u> $A \cup \varnothing = A$

<u>Thm.21</u> Wenn $A \subseteq B$, dann $A \cup C = B \cup C$ (Links-Monotonie)

<u>Thm.22</u> Wenn $A \subseteq B$, dann $C \cup A = C \cup B$ (Rechts-Monotonie)

Sehr ähnlich zu der Mengenvereinigung verhält sich eine zweite zweistellige Operation, der Mengendurchschnitt. Der Durchschnitt der Mengen A und B, $A \cap B$ (auch die *Schnittmenge von* A *und* B genannt), ist die menge, die aus den Elementen besteht, die sowohl zu A als auch zu B gehören:

<u>Def. 7</u> $A \cap B = \{x: x \varepsilon A \ \& \ x \varepsilon B\}$

Die elementaren Eigenschaften von $\cap$ sind denen von $\cup$ sehr ähnlich:

<u>Thm.22</u> $A \cap A = A$ (Idempotenz)

<u>Thm.23</u> $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)

<u>Thm.24</u> $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)

<u>Thm.25</u> $A \cap B = A$ gdw. $A \subseteq B$

<u>Thm.26</u> $A \cap \varnothing = \varnothing$

<u>Thm.27</u> Wenn $A \subseteq B$, dann $A \cap C = B \cap C$ (Links-Monotonie)

<u>Thm.28</u> Wenn $A \subseteq B$, dann $C \cap A = C \cap B$ (Rechts-Monotonie)

Es gibt auch einen allgemeinen Zusammenhang zwischen den beiden Operationen $\cup$ und $\cap$:

<u>Thm.29</u> $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivität von $\cup$ über $\cap$)

Beweis. Um die Identität der Mengen rechts und links vom Gleichheitszeichen zu beweisen, müssen wir zeigen (i) daß jedes Element, das zur linken Menge gehört auch zur rechten Menge gehört, und (ii) daß jedes zur rechten Menge gehörige Element auch zur linken Menge gehört. Wir zeigen nur (i), der Beweis von (ii) verläuft völlig analog.

Beweis von (i): Sei a ein willkürliches Element von $(A \cap B) \cup C$. Dann gilt nach der Def. von $\cup$, daß entweder $a \varepsilon A \cap B$ oder $a \varepsilon C$. Nach Def. 7 ist das erste Disjunkt äquivalent mit $a \varepsilon A$ und $a \varepsilon B$. Also gilt
$a \varepsilon (A \cap B) \cup C$ gdw. ($a \varepsilon A$ und $a \varepsilon B$) oder $a \varepsilon C$. Diese letzte Bedingung ist aber aufgrund von aussagenlogischen Überlegungen äquivalent mit: ($a \varepsilon A$ oder $a \varepsilon C$) und ($a \varepsilon B$ oder $a \varepsilon C$) . Sukzessive Anwendungen von Def. 7 und Def. 6 zeigt, daß diese Bedingung wiederum äquivalent ist mit
$a \varepsilon A \cup C$ und $a \varepsilon B \cup C$ und daher auch mit $a \varepsilon (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Thm.30 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Distributivität von $\cap$ über $\cup$)

Die Operationen $\cup$ und $\cap$ haben eine auffällige formale Ähnlichkeit zu den aussagenlogischen Junktoren v und &. Dies zeigt sich sowohl in den Theoremen 16 - 30, als auch (und zwar ganz besonders) in dem Beweis von Thm. 29. Wir können diese augenfällige Analogie wie folgt erklären und begründen. Wir haben gesehen, daß jede Bewertung der Aussagenvariablen einer aussagenlogischen Formel (bzw. einer Menge solcher Formeln) dieser Formel (bzw. jeder Formel in der Menge) einen Wahrheitswert zuordnet. Wenn wir die Aussagenvariablen als Abkürzungen für bestimmte Aussagen interpretieren - z.B. indem wir p als Abrürzung für "Maria ist zuhause, q als Abkürzung für "Fritz ist auf dem Wasen." usw. betrachten - dann ergibt sich je nach der aktuellen Situation, auf die sich diese Aussagen beziehen, eine Bewertung der Aussagenvariablen. Sei nun U eine Menge solcher Situationen, z.B. die Situationen der sukzessiven Abende einer zweiwöchigen Periode. Jeder dieser Situationen entspricht eine bestimmte Bewertung. Wenn z.B. an dem ersten Abend sowohl Maria als auch Fritz auf dem Wasen sind, so ordnet die entsprechende Bewertung p den Wert f und q den Wert w zu, sind sie am zweiten Abend beide zuhause, so hat nach der zweiten Bewertung p den Wert w und q den Wert, usw. Wir können also jeder der Aussagenvariablen p, q, ... eine Teilmenge [p],[q], ... von U zuordnen, die aus genau den Situationen s besteht, die die Variable wahr machen. (Also gehört die erste der oben erwähnten nicht zu [p], aber wohl zu [q], die zweite zu [p], aber nicht zu [q], usf.

Der Zusammanhang zwischen den Junktoren & und v einerseits und den Operationen $\cap$ und $\cup$ andererseits sollte jetzt klar sein. Die Menge der Situationen, in denen sowohl p als auch q wahr sind, [p & q], ist der Durchschnitt der Mengen [p] und [q], [p] $\cap$ [q], und die Menge in der zumindest eine der Variablen p und q wahr sind, [p v q], ist die Vereinigung dieser Mengen, [p] $\cup$ [q].

Aus dieser Perspektive liegt es nahe, zu versuchen, Mengentheoretische Operationen zu finden, die in einem ähnlichen Sinne den sonstigen im Kapitel 1 diskutierten Junktoren - $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ - entsprechen. Betrachten wir dieses Problem zuerst für die Negation $\neg$. $\neg$ ist ein einstelliger Junktor. Man würde daher erwarten, daß die ihm entsprechende mengentheoretische Operation ebenfalls einstellig sein sollte. Und aufgrund der obigen Überlegungen würde man annehmen, diese Operation sollte, wenn man ihn auf eine Menge A anwendet, das *Komplement* von A liefern, d.h. die Menge der aus den Entitäten besteht, die nicht Element von A sind. Denn betrachten wir den Fall der aussagenlogischen Formel $\neg$ p. $\neg$ p ist wahr in genau den Situationen, in denen p falsche ist. Also ist [$\neg$ p] die Menge, die aus all den Situationen besteht, die nicht zu [p] gehören.

Hier ist nun aber Vorsicht geboten, und zwar wegen der Probleme, auf die das Russellsche Paradoxon uns aufmerksam gemacht hat. Die obige Überlegung war zwar korrekt, aber nur deshalb, weil wir von einer von Anfang an vorgegebenen Gesamtmenge U von Sitationen ausgegangen sind. In diesem Kontext besteht das Komplement von [p] aus den Situationen *in U*, die nicht zu [p] gehören. Ist aber eine solche Gesamtmenge U nicht vorausgesetzt, dann droht Komplementbildung uns in genau die Widersprüche zu verstricken, von denen wir uns zu befreien versucht haben. Das Problem ist dieses. Nehmen wir an, es gäbe neben der Menge A auch die Komplementmenge $\{x: \neg(x \varepsilon A)\}$. Wenn wir ebenfalls zu er schon gemachten Annahme stehen würden, daß es immer möglich ist, die Vereinigungsmenge zweier Mengen zu bilden, dann würde sich aus A und $\{x: \neg(x \varepsilon A)\}$ die Vereinigungmenge $\{x: x \varepsilon A \vee \neg(x \varepsilon A)\}$ bilden lassen. Wenden wir jetzt das Aussonderungsaxiom auf diese Menge und die Bedingung "$\neg(x \varepsilon x)$" an, so ergibt sich die paradoxale "Russellmenge" von S. ??.

In den bekanntesten Mengentheorien wird dieser Widerspruch vermieden, indem man Komplementbildung nur relativ zu einer Bezugsmenge zuläßt. Damit wird die Komplementoperation zu einer zweistelligen Operation, die, wenn angewendet auf die Mengen A und B, die Teilmenge von A erzeugt, die aus all den Elementen besteht, die nicht zu B gehören. Damit wird die Komplementopertation, die sonst zu bedrohlich großen Mengen führen würde, auf eine besondere Anwendung des Aussonderungsaxiom (auf die Menge A und die Bedingung "$\neg(x \in B)$"!) reduziert. Wir nennen diese Operation die Differenz zwischen A und B und bezeichnen die Operation mit dem "schrägen Minuszeichen" \.

<u>Def. 8</u> $A \setminus B = \{x: x \in A \ \& \ x \notin B\}$[12]

(Im bestimmten Kontexten, in denen eine umfassende Gesamtmenge U vorgegeben ist, läßt sich die Operation \ zu einer einstelligen Operation $\bar{}$ vereinfachen. $\bar{B}$ bezeichnet in einem solchen Kontext die Differenzmeng U\B. Da wir in diesem Abschnitt von einer Gesamtmenge U ausgegangen sind, hätten wir uns hier von Anfang an mit der einstelligen Operation begnügen können. Im allgemeinen ist dies aber, wie wir gerade gesehen haben, nicht möglich.)

Im Gegensatz zu den Operationen $\cup$ und $\cap$ ist \ nicht symmetrisch - es gilt nicht allgemein, daß A\B = B\A. Im Gegenteil - wie Thm. 32 zeigt, ist die Identität von A\B und B\A die Ausnahme.

<u>Thm.31</u> $A\setminus B = \emptyset$ gdw. $A \subseteq B$
<u>Thm.32</u> $A\setminus B = B\setminus A$ gdw. $A = B$
<u>Thm.33</u> $A\setminus\emptyset = A$
<u>Thm.34</u> $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap B$
<u>Thm.35</u> $(A\cup B)\setminus C = (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
<u>Thm.36</u> $A\setminus(B \cap C) = (A\setminus B) \cup (A\setminus C)$
<u>Thm.37</u> $A\setminus(B \cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$

Der Versuch, mengentheoretische Operationen definieren, die den Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ entsprechen, stößt auf ähnliche Probleme wie beim Komplement. Dieselben Überlegungen wie oben führen für den Fall von $\rightarrow$ zu der "Menge" $\{x: \neg(x \in A) \vee x \in B\}$ und für den Fall von $\leftrightarrow$ zu der

---

12 Von jetzt an werden wir meistens "$x \notin y$" satt des umständlicheren "$\neg(x \in y)$" schreiben.

"Menge" $\{x: (\neg(x \varepsilon A) \vee x \varepsilon B) \& (\neg(x \varepsilon B) \vee x \varepsilon A)\}$. Auch diese beiden "Mengen" führen, zusammen mit den schon gemachten Annahmen, zur Russell-Paradoxie. Also müssen wir uns auch hier mit einer partiellen Analogie begnügen, die nur im Kontext einer vorausgesetzten Gesamtmenge U gilt. Unter dieser zusätzlichen Annahme können wir dann die $\rightarrow$ entsprechende Operation als $(U\backslash A) \cup B$ und die $\leftrightarrow$ entsprechende als $((U\backslash A) \cup B) \cap ((U\backslash B) \cup A)$ definieren. Eine uneingeschänkte Analogie besteht hingegen zwischen der exklusiven Disjunktion und der mengentheoretischen Operation der sog. *symmetrischen Differenz*. Die symmetrische Differenz zwischen A und B ist als die Vereinigung der Differenzen A\B und B\A definiert. Als Symbol verwenden wir $\div$.

<u>Def. 9</u> $A \div B = \{x: (x \varepsilon A \& \neg(x \varepsilon B)) \vee (x \varepsilon B \& \neg(x \varepsilon A))\}$

Wie aus Def. 9 ersichtlich, entspricht $\div$ dem aussagenlogischen Junktor, der sich, salopp ausgedrückt, als $(p \& \neg q) \vee (q \& \neg p)$ definieren läßt. Daß in der Tat $\div$ eine symmetrische Operation ist, bestätigt das folgende Theorem. Thm. 39 zeigt, daß ebenfalls assoziativ ist.

<u>Thm.38</u> $A \div B = B \div A$ (Kommutativität von $\div$)

<u>Thm.39</u> $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$ (Assoziativität von $\div$)

##

## Modelltheoretische Semantik für den Monadischen Prädikatenkalkül

Wir sahen, wie sich mit der Methode der Venn-Diagramme überprüfen läßt, ob ein Argument des MPK gültig ist. Der Grundgedanke dabei war: Versuche ein Gegenbeispiel für das Argument zu konstruieren (d.h. ein Venn-Diagramm, in dem die Prämissen des Arguments wahr sind und sein Schluß falsch). Gelingt der Versuch, so folgt, daß das Argument in der Tat nicht gültig ist. Scheitert der Versuch, so kann man umgekehrt auf die Gültigkeit des Arguments schließen, daß das Argument gültig ist. Diese letztere Inferenz ist aber nur dann korrekt, wenn die erfolglose Suche nach einem Gegenbeispiel *systematisch* war: Es soll keine Möglichkeit, ein Gegenbeispiel zu konstruieren, übergangen werden. In dem Fall können wir schließen: Gäbe es ein Gegenbeispiel, so hätten wir mit unserer Methode auch eins gefunden.

Venn-Diagramme sind Beispiele von *Modellen* des MPK, in denen jedes Prädikat eine Teilmenge eines gegebenen "Diskursuniversums" als seine Extension bestimmt. Den Modellbegriff, auf den diese Feststellung Bezug nimmt, ist in Def. 1 definiert:

Def. 1 Ein *Modell für* den MPK ist ein Paar $M = \langle U_M, I_M \rangle$, wobei $U_M$ (das *Universum von* M) eine nicht-leere Menge ist, und $I_M$ eine Funktion, die die die Aussagenkonstanten des MPK auf die Wahrheitwerte 0, 1, die Individuenkonstanten des MPK auf Elemente von $U_M$ und die Prädikate des MPK auf Teilmengen von $U_M$ abbildet.

Intuitiv ist klar, daß jeder Satz A des MPK in jedem Modell M einen definiten Wahrheitswert hat. Wir wollen jetzt definieren, wie dieser Wahrheitswert einerseits durch die Eigenschaften von M und andererseits durch die syntaktische Form von A bestimmt ist. Dabei liegt es nahe, rekursiv vorzugehen: Wir wollen beschreiben, wie der Wahrheitswert eines komplexen Satzes aufgrund dessen bestimmt ist, was sich über seine syntaktischen Konstituenten sagen läßt. Dabei begegnet uns aber ein Problem. Betrachten wir z.B. den Satz:

(1) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

Dieser Satz wird syntaktisch gebildet, indem der Quantor "$(\forall x)$" mit der Formel $(P(x) \rightarrow Q(x))$ kombiniert wird. Nun is aber $(P(x) \rightarrow Q(x))$ kein Satz, in dem Sinne, daß man mit ihm eine definite Aussage verbinden könnte. Ursache sind die "freien" Vorkommen der Variable x, die diese Formel enthält: Im Prinzip könnte x jedes Element des Universums bezeichnen; so lange nicht entschieden ist, welches Element bezeichnet ist, läßt sich über die Wahrheitswerte von P(x) und Q(x) - und somit über den Wahrheitwert von $(P(x) \rightarrow Q(x))$ - nichts spezifisches sagen. Damit sich auch über die Wahrheitswerte von Formeln mit freien Variablenvorkommen definite Aussagen machen lassen, ist notwendig, diese Vorkommen mit Objekten aus dem Universum $U_M$ zu belegen. (Man kann sich, wenn man will, solche Belegungen als *kontextuell* bestimmt vorstellen, genauso wie ein Pronomen oft im Kontext, in dem es verwendet wrid, ein Objekt bezeichnet (entweder aufgrund eines begleitenden Zeigens durch den Sprecher auf das Objekt oder wegen seines anaphorischen Bezugs auf etwas, das im Vortext erwähnt wurde).

Für die Bestimmung des Wahrheitswertes eines Satzes sind immer nur Belegungen endlich vieler Variablen relevant, denn der Satz wird ja nur endlich viele Variablen enthalten. Es ist aber aus technischen Gründen attraktiv, mit Belegungen zu arbeiten, die *allen* Variablen Objekte zuordnen. Damit kommen wir zur folgenden

Def. 2. 1. Sei U eine Menge. Eine *Belegung in* U ist eine Funktion **a**, so daß (i) Dom(**a**) = die Menge aller Variablen; und (ii) für jede Variable $v_i$ gilt $\mathbf{a}(v_i) \in U$.

2. Sei **a** eine Belegung in U, u ein Element von U. Mit $\mathbf{a}[u/v_i]$ bezeichnen wir die Belegung in U, die der Variable $v_i$ das Objekt u zuordnet und die allen anderen Variablen denselben Wert zuordnet wie **a**.

Bevor wir die Wahrheitsdefinition (von Formeln in Modellen bzgl Belegungen) geben, zuerst noch eine Präzisierung des bisher nur informell verwendeten Begriffs eines *freien* bzw. *gebundenen Vorkommens* einer Variablen $v_i$ *in* einer Formel A. Diese Definition setzt selbst wiederum den Begriff eines Vorkommens einer Variablen in einer Formel (allgemeiner: eines Ausdrucks innerhalb eines anderen Ausdrucks) voraus. Wir brauchen diesen Begriff deshalb, weil eine Formel mehrere Vorkommen derselben Variablen enthalten kann, von denen manche frei und andere gebunden siein können. Z. B. ist in

(2) $R(x) \vee (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

das erste Vorkommen von x frei, während die drei letzten gebunden sind. Den Begriff eines Vorkommens einer Variablen formal zu definieren, würde hier zu weit führen. Wir gehen aber davon aus, daß der Begriff auch ohne Definition verständlich ist.

Der zweite Teil der folgenden Definition 3 von freien Vorkommen ist rekursiv (bzgl. der Definition von Formeln).

Def. 3 1. Jedes Vorkommen einer Variable $v_i$ in einem Quantorenpräfix $(\forall v_i)$ oder $(\exists v_i)$ in der Formel A ist nicht *frei in* A.

2. Das Vorkommen von $v_i$ in einer atomaren Formel $P_j(v_i)$ ist *frei in* dieser Formel.

3. Sei $\alpha$ ein Vorkommen der Variable in A, das frei ist in A und sei B irgendeine andere Formel. Dann ist $\alpha$ auch *frei in* den Formeln $\neg A$, A & B, B & A, A v B, B v A, $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow A$.

4. Sei $\alpha$ wie in 3. Dann ist $\alpha$ *frei in* $(\forall v_j)A$ und $(\exists v_j)A$ für $j \neq i$. $\alpha$ ist nicht *frei* (oder auch *gebunden*) *in* $(\forall v_i)A$ und $(\exists v_i)A$.

Eine Formel A, in der es keine freien Vorkommen von Variablen gibt, nennen wir einen *Satz*.

Es folgt nun die Wahrheitsdefinition, d.h. die Definition des Wahrheitswertes $[A]_{M,\mathbf{a}}$ in einem Modell $M = <U_M, I_M>$ bezgl einer Belegung **a** in $U_M$. Wir schließen uns der üblichen Konvention an, nach der 1 den Wahrheitswert "wahr" und 0 den Wahrheitswert "falsch" repräsentiert.

Def. 4 Sei $M = <U_M, I_M>$ ein Modell für den MPK und **a** eine Belegung in $U_M$.
Der *Wahrheitwert* einer Formel A *in* M *bezüglich* **a**, $[A]_{M,\mathbf{a}}$, ist wie folgt definiert:

(i) a. $[p_j]_{M,\mathbf{a}} = I_M(p_i)$
b. $[P_j(c_i)]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. $I_M(c_i) \in I_M(P_j)$
c. $[P_j(v_i)]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. $\mathbf{a}(v_i) \in I_M(P_j)$

(ii) a. $[\neg A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. $[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$
b. $[A \,\&\, B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. $[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$
c. $[A \vee B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. $[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ oder $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$
d. $[A \rightarrow B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. $[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$ oder $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$

d. $[A \leftrightarrow B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. ($[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$) oder ($[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 0$)

(iii) a. $[(\forall v_j)A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. für jedes Objekt u in $U_M$ gilt: $[A]_{M,\mathbf{a}[u/v_i]} = 1$

b. $[(\exists v_j)A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. es ein Objekt u in $U_M$ gibt, so daß gilt: $[A]_{M,\mathbf{a}[u/v_i]} = 1$

N.B Es sei insbesondere die Quantifikation über Belegungsalternativen in (iii.a,b) zu beachten.

Wie schon erwähnt, wird der Wahrheitswert einer Formel A im Allgemeinen nur von einem Teil der Belegung **a** abhängen; denn A hat ja nur endlich viele Variablen. Es läßt sich sogar noch etwas genaueres sagen: Der Wahrheitswert von A hängt nur von dem Teil von **a** ab, der die freien Variablen von A belegt. Dies ist der Inhalt von folgendem Lemma, das wir hier nicht explizit beweisen werden:

<u>Lemma.</u> Seien A eine Formel und M ein Modell und seien $x_1, ..., x_n$ die Variablen mit freien Vorkommen in A. Seien **a** und **b** zwei Belegungen in $U_M$, so daß für i = 1, ..., n gilt: $\mathbf{a}(x_i) = \mathbf{b}(x_i)$. Dann gilt:

$$[A]_{M,\mathbf{a}} = [A]_{M,\mathbf{b}}$$

Ein besonderer Fall der im Lemma beschriebenen Sachlage ergibt sich, wenn A keine freien Vorkommen von Variablen enthält, also ein Satz ist. Weil die im Lemma erwähnte Beziehung zwischen den Belegungen **a** und **b** trivial erfüllt ist, wenn n = 0 (d.h. die Beziehung besteht in diewem Fall zwischen beliebigen Belegungen **a** und **b** besteht, folgt, daß wenn ein Satz wahr bzw. falsch in M bzgl einer Belegung **a** ist, dies auch für jede andere Belegung in $U_M$ der Fall sein muß. Deshalb können wir, wenn A ein Satz ist, einfach von dem *Wahrheitswert von* A i*n* M sprechen, ohne auf eine bestimmte belegung Bzug nehmen zu müssen.. Wir schreiben in solchen Fällen oft entsprechend: $[A]_M = 1/0$.

<u>Notation.</u> Oft wollen wir behaupten, daß eine Formel A bzgl einer Belegung **a** in einem Modell M wahr ist. Dies läßt sich zwar formal als "$A]_{M,\mathbf{a}} = 1$" ausdrücken, oft wird aber die üblichere Notation:

$$M \models_{\mathbf{a}} A$$

vorgezogen. Falls A ein Satz ist, läßt sich diese Notation dann wieder vereinfachen zu:

$$M \models A$$

## **Monadischer Prädikatenkalkül mit Identität.**

Bevor wir uns mit Versionen des Prädikatenkalüls befassen, in denen es neben einstelligen auch mehrstellige Prädikate gibt, betrachten wir eine beschränkte Erweiterung des MPK, in der wir außer einstelligen Prädikaten ein besonderes zweistelliges Prädikat zulassen. Dies ist das Indetitätsprädikat =. Dieses Prädikat erlaubt uns die Formulierung neuer atomaren Formeln von der Form "s = t", mit Individuentermen (d.h. Variablen oder Individuenkonstanten) s und t. (Wir schreiben die Argumente von = immer zur linken bzw. rechten Seite des Symbols, statt die sonst in der Prädikatenlogik übliche Schreibweise "= (s,t)" zu verwenden, in der dem Prädikatsymbol alle seine Argumente folgen.)

Diese Erweiterung des MPK ermöglicht es, über die Anzahl der Objekte Aussagen zu machen, die eine gegebene (im MPK ausadrückbare) Eigenschaft besitzen. So können wir z.B. die Behauptung, daß es mindestens zwei Objekte gibt, die P erfüllen, wie folgt formulieren:

(3) $(\exists x)(\exists y)(x \neq y \;\&\; P(x) \;\&\; P(y))$

Ebenfalls läßt sich die Behauptung, daß es höchstens ein Objekt gibt, das sowohl P als auch Q erfüllt, wie in (4) ausdrücken:

(4) $(\forall x)(\forall y)((P(x) \;\&\; Q(x) \;\&\; P(y) \;\&\; Q(y)) \rightarrow x = y)$

und die Behauptung, es gebe genau zwei Objekte, die P aber nicht Q erfüllen, wie in (5):

(5) $(\exists x)(\exists y)(x \neq y \;\&\; P(x) \;\&\; \neg Q(x) \;\&\; P(y) \;\&\; \neg Q(y) \;\&$
$(\forall z)((P(z) \;\&\; \neg Q(z)) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

Formal bedeutet die Hinzunahme von =, daß wir, wie schon beobachtet, einen neuen Typ von atomarer Formel - s = t - berücksichtigen müssen. Damit wir dieser Erweiterung Rechnung tragen, reicht es, der Definition von den Formeln des MPK auf S. 21 die folgende Klausel hinzuzufügen:

(6) Wenn s und t Terme sind, dann ist s = t eine *Formel*.

Das Identitätsprädikat ist ein *logisches* Prädikat in dem Sinn, daß seine Interpretation in allen Modellen dieselbe ist: Die Bedeutung ist immer die Identität - die Beziehung, in der ein Objekt nur zu sich selbst stehen kann und in dem auch jedes Objekt zu sich selbst steht. Damit ist die Interpretation von = in beliebigen Modellen $M = \langle U_M, I_M \rangle$ ein für allemal festgelegt: Die Extension von = in M ist immer die "Identitätsrelation auf $U_M$", d.h. die Relation $\{\langle u,u \rangle : u \in U_M\}$.

Dies bedeutet, daß wir den Begriff eines Modells für den MPK auch für den jetzt um = erweiterten MPK ohne Änderung beibehalten können. Nur die Wahrheitsdefinition (Def. 3 oben) muß um die folgende Bedingung erweitert werden:

i. c. $[s = t]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[s]_{M,\mathbf{a}}$ identisch mit $[t]_{M,\mathbf{a}}$ ,

wobei $[s]_{M,\mathbf{a}} = I_M(c_i)$, wenn s die Konstante $c_i$ ist, und $[s]_{M,\mathbf{a}} = \mathbf{a}(v_i)$, wenn s die Variable $v_i$ ist;

und analog für t.

## Mengenlehre (Fortsetzung)

Bevor wir vom Monadischen zum allgemeinen Prädikatenkalkül übergehen, wollen wir zuerst die Mengenlehre etweas weiter vorantreiben. Insbesondere wird es in diesem Abschnitt darum gehen die Mengen zu definieren, die als Interpretationen von mehrstelligen Prädikaten dienen können, so daß wir, wenn wir im nächsten Abschnitt die Prädikatenlogik erweitern, die dazu gehörige Modelltheorie behandeln können werden.

Die Überlegungen dieses Abschnittes zwingen uns, die vereinfachende Annahme des ersten Kapitels über Mengenlehre, nach der wir uns auf die Teilmengen einer vorgegebenen Gesamtmenge U von Objekten beschränken wollten, fallen zu lassen. Von jetzt an werden wir nicht nur Mengen betrachten, deren Elemente Nicht-Mengen sind, sondern auch Mengen, die Mengen als Elemente haben, Mengen von solchen Mengen, usw. Diese informelle Beschreibung wird aber der wirklichen Komplexität der Mengen, mit denen wir es jetzt zu tun haben werden, immer noch nicht vollends gerecht. Denn unter diesen Mengen gibt es auch solche, deren Elemente zum Teil aus Mengen und zum Teil aus Nicht-Mengen bestehen, und auch diese Mengen können dann wieder in anderen Mengen als Elemente enthalten sein, möglicherweise zusammen mit Objekten, Mengen von Objekten usw . So ergibt sich eine sehr komplexe mengentheoretische Hierarchie, von der wir in diesem Kurs übrigens nur einen kleinen Teil zu sehen bekommen werden.

Um die Existenz derjenigen Mengen zu garantieren, um die es in diesem Kurs gehen wird, brauchen wir zusätzliche Erzeugungsprinzipien. Das erste dieser Prinzipien besagt, daß jede endliche Aufzählung von schon gegebenen Entitäten zu einer Menge zusammengefügt werden kann, die genau diese Entitäten als Elemente enthält. Als Notation für diese Menge plazieren wir eine Liste dvon Termen, die die Entitäten bezeichnen, inneralb von geschweiften Klammern. Also bezeichnen wir die Menge, die wir durch Zusammenfassung der Objekte a, b, c bilden, als {a,b,c}. Analog ist {a,b} die Menge, deren Elemente a und b und sind, und ist {a} die Menge, deren einziges Element a ist.

Wir können diese Mengen nun wieder zu neuen Mengen zusammenfügen. So ist z. B
{{a,b,c}, {a,b},{a}} die 3-elementige Menge, deren Elemente die Mengen {a,b,c}, {a,b} und {a} sind; {{a,c},{a,b}} ist eine Zweiermenge, deren Elemente die Mengen {a,c} und {a,b} sind - Mengen, die selbst jeweils auch wieder aus zwei Elementen bestehen. Darüberhinaus lassen sich auch "inhomogene" Mengen wie {a, {a,b}} oder {b, {a,c}, {{a,b,c}, {a,b}}} bilden. Die erste von diesen besteht aus zwei Elementen, dem Objekt a und der Menge {a,b}; die zweite aus drei Elementen, dem Objekt b, der aus zwei Objekten bestehenden Menge {a,c} und der aus den Mengen {a,b,c} und {a,b} bestehenden Zweiermenge {{a,b,c}, {a,b}}. Und so fort.

Wir werden das Prinzip, nach dem es zu jeder endlichen Aufzählung von Elementen eine entsprechende Menge gibt, das *Prinzip Endlicher Mengenbildung* (PEM) nennen. Es erlaubt die Bildung unendlich vieler Mengen, die aber selbst immer endlich sind. Es ergibt sich sogar eine unendliche Vielfalt, wenn wir nur von der leeren Menge ∅ ausgehen und keine Nicht-Mengen als Ausgangsobjekte in Betracht ziehen. Z.B läßt sich leicht verifizieren, daß die Mengen ∅, {∅}, {∅, {∅}}, {∅, {∅}, {∅, {∅}}}, ... ; {{∅}}, {{{∅}}}, ... alle voneinander verschieden sind. Insbesondere läßt sich die erste Reihe ins Unendliche fortetzen, indem man aus der jeweils zuletzt gebildeten Menge X als nächste die Menge X ∪ {X} bildet; alle auf diese Weise entstehenden Mengen sind voneinander verschieden. Ebenso ergibt die Fortsetzung von der Reihe ∅, {∅}, {{∅}}, {{{∅}}}, ... unendlich viele verschiedene Mengen. Und dennoch machen diese beiden Reihen nur einen winzigen Teil aller

Mengen aus, die sich mittels des PEM aus der leeren Menge erzeugen lassen.[13]

N.B. Es ist zu betonen, daß die Einermenge {a} nicht dasselbe ist wie das Objekt a. Das folgt schon daraus, daß die Menge {a} a als Element enthält; a dagegen hat, angenommen es ist keine Menge, überhaupt keine Elemente, enthält also auch sich selbst nicht als Element. Aber auch für Mengen A gilt allgemein, daß A und {A} nicht identisch sind. Ein Beispiel ist die leere Menge $\emptyset$. $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ sind nicht identisch, weil $\{\emptyset\}$ ein Element hat (und zwar $\emptyset$), während $\emptyset$ keine Elemente hat.

Wie schon bemerkt, sind die Mengen, die sich mit Hilfe des PEM bilden lassen, alle endliche Mengen - jede besteht aus nur endlich vielen Elementen. Stärker noch: die Mengen, die nur mit Hilfe dieses Prinzips aufgebaut werden, sind alle *hereditär* endlich, d. h. sie sind selbst endlich, die Mengen, die sie als Elemente enthalten, sind endlich, deren Elemente sind, insofern sie Mengen sind, wieder endlich, usf. Für bestimmte mathematische und logische Zwecke braucht man aber auch unendliche Mengen. In diesem Zusammenhang sind, wie es sich herausgestellt hat, noch zusätzliche Existenzprinzipien gefordert. Drei von diesen sollen hier explizit erwähnt werden:

(i) Das *Unendlichkeitsaxiom*. Dieses Axiom garantiert die Existenz von unendlichen Mengen. (Genau gesprochen fordert es explizit nur die Existenz von einer unendlichen Menge; die übrigen Existenzprinzipien generieren dann aber aus dieser einen unendlichen Menge unzählige weitere (unendliche und endliche) Mengen.

---

[13] Der Name "Prinzip Endlicher Mengenbildung" ist kein Standardterm aus der mengentheortischen Literatur. Übrigens, n der Form, in der wir das Prinzip hier formuliert haben, genügt es den Ansprüchen eines logisch sauberen Aufbaus der Mengenlehre nicht. Der Grund ist, daß der Begriff "endlich", der in der obigen Formulierung des Prinzips vorkommt, nicht definiert haben. Zwar gibt es innerhalb der Mengenlehre Definitionen des Endlichkeitsbegriffs; eine solche Definition ist aber erst auf Basis einer Grundlage möglich, die das PEM voraussetzt.

Es läßt sich aber unschwer verifizieren, daß wir den Effekt des PEM auch schon mit Hilfe der folgenden beiden restringierteren Existenzannahmen erreichen: (i) das (binäre) Vereinigungsaxiom, nach dem für jede zwei Mengen X und Y auch die Vereinigungsmenge $X \cup Y$ besteht; und (ii) das Prinzip, das besagt, daß es für jede Entität a die Einermenge {a} gibt. Gegen diese Annähmen gibt es auch in dem bis zu diesem Punkt von uns erreichten Entwicklungsstadium der Mengenlehre keine logischen Einwände.

(ii) Das *Potenzmengenaxiom*, das besagt, daß es zu jeder Menge X auch die *Potenzmenge von* X, d. h. die Menge aller Teilmengen von X, gibt. Die Potenzmenge von X wir als "$P$(X)“ bezeichnet; also gilt:

$$P(X) = \{Y: Y \subseteq X\}$$

(iii) Das *(Allgemeine) Vereinigungsaxiom*. Dieses Prinzip garantiert für jede Menge X die Existenz einer Menge $\cup$ X, der *Vereinigung von* X, die aus allen Entitätn a besteht, die mindestens einem Element von X als Element angehören:

$$\cup X = \{a: (\exists Y)( Y \varepsilon X \,\&\, a \varepsilon Y)\}$$

N.B in der Praxis wird die Vereinigungsoperation fast nur auf Mengen X angewendet, die ausschließlich aus Mengen bestehen (Mengen X also, deren Elemente alle auch selbst wieder Mengen sind). Die Operation ist aber auch für X definiert, die diese Bedingung nicht erfüllen. In einem solchen Fall werden die Elemente von X, die keine Mengen sind, zu $\cup$ X keinen Beitrag liefern, weil sie selbst keine Elemente haben; sie stören aber weiter nicht. Die Operation $\cup$ ist sogar formal anwendbar auf ein X, das gar keine Menge ist. In dem Fall ist das Resultat der Anwendung die leere Menge $\varnothing$.

Die Operationen $P$ und $\cup$ arbeiten gewissermaßen in entgegengesetzten Richtungen. Ist z. B. X eine Menge von Mengen von Objekten, so ist $P$(X) eine Menge von Mengen von Mengen von Objekten, $\cup$ X dagegen eine Menge von Objekten: $P$(X) ist in diesem Fall von einer "höheren", $\cup$ X von einer "niedrigeren" Ebene als X. Im allgemeinen gilt denn auch, daß $\cup$ den Effekt von $P$ wieder rückgängig macht:

<u>Thm.40</u> Für jedes X gilt:

$$\cup(P(X)) = X$$

<u>Beweis</u> Zuerst zeigen wir, daß X $\subseteq$ $\cup$($P$(X)). Dies ist so, weil X $\subseteq$ X, weshalb, wegen der Definition von $P$, X $\varepsilon$ $P$(X). Denn ist nun a ein beliebiges Element von X, dann ist die Bedingung $\exists$Y)( Y $\varepsilon$ X & a $\varepsilon$ Y) erfüllt, wenn wir X als Instanz der Variable Y nehmen. Also gilt

a $\varepsilon \bigcup(P(X))$.

Wir müssen jetzt zeigen, daß $\bigcup(P(X)) \subseteq X$. Wir nehmen wir an, daß a $\varepsilon \bigcup(P(X))$. Dann gibt es nach der Definition von $\bigcup$ ein Y $\varepsilon$ $P(X)$, so daß a $\varepsilon$ Y. Wenn aber Y $\varepsilon$ $P(X)$, dann $Y \subseteq X$. Dann aber auch a $\varepsilon$ X. Also gilt $\bigcup(P(X)) \subseteq X$.

Wenn die Operationen $\bigcup(P$ in der umgekehrten Reihenfolge angewandt werden, ergibt sich allgemein keine Menge, die mit der Ausgangsmenge identisch ist. Nur wenn X eine Menge von Mengen ist, haben wir eine Inklusion in einer der beiden Richtungen.

Thm.41 Sei X eine Menge, deren Elemente alle Mengen sind. Dann gilt

$$X \subseteq P(\bigcup X)$$

Die Vereinigung $X \cup Y$ zweier Mengen X und Y ist ein besonderer Fall der oben eingeführten Vereinigungsoperation $\bigcup$, der sich ergibt, indem man jene auf die Zweiermenge $\{X,Y\}$ anwendet:

Thm.42 $X \cup Y = \bigcup\{X,Y\}$

In den folgenden Theoremen sind einige Zusammenhänge zwischen den neuen und den im ersten Abschnitt zur Mengenlehre eingeführten Beziehungen und Operationen formuliert.

Thm.43 $X \subseteq Y$ gdw. $P(X) \subseteq P(Y)$

Beweis Wenn $X \subseteq Y$, dann ist jede Teilmenge von X Teilmenge von Y. Also folgt, daß $P(X) \subseteq P(Y)$. Sei nun umgekehrt $P(X) \subseteq P(Y)$ und sei a beliebiges Element von X. Dann ist $\{a\}$ Element von $P(X)$. Also ist nach unserer Annahme $\{a\}$ Element von $P(Y)$. Das bedeutet aber, daß $\{a\}$ Teilmenge ist von Y. Daraus folgt wiederum, daß a $\varepsilon$ Y.

Thm.44 Wenn $X \subseteq Y$, dann $\bigcup X \subseteq \bigcup Y$

Thm.45 $P(X \cap Y) = P(X) \cap P(Y)$

Thm.46 $\bigcup(X \cup Y) = (\bigcup X) \cup (\bigcup Y)$

<u>Beweis</u> Sei zuerst a $\varepsilon \bigcup (X \cup Y)$. Dann gibt es ein Z $\varepsilon$ $X \cup Y$, so daß a $\varepsilon$ Z. Entweder Z $\varepsilon$ X oder Z $\varepsilon$ Y. Im ersten Fall gilt a $\varepsilon \bigcup X$, im zweiten a $\varepsilon \bigcup Y$. In beiden Fällen gilt also a $\varepsilon$ $((\bigcup X) \cup (\bigcup Y))$.
Nehmen wir nun an, daß a $\varepsilon$ $((\bigcup X) \cup (\bigcup Y))$. Dann ist entweder a $\varepsilon \bigcup X$ oder a $\varepsilon \bigcup Y$. Also gibt es entweder ein Z $\varepsilon$ X mit a $\varepsilon$ Z oder ein Z $\varepsilon$ Y mit a $\varepsilon$ Z, In beiden Fällen ist das erwähnte Z Element von $X \cup Y$. Also gilt in beiden Fällen a $\varepsilon \bigcup (X \cup Y)$.

##

Eines unserer Ziele ist, über Mengen zu verfügen, die als Interpretationen von zweistelligen Prädikaten dienen können. Zweistellige Prädikate drücken Beziehungen zwischen jeweils zwei Objekten aus; Beispiele aus der natürlichen Sprache sind Komparative wie "größer als"; Ähnlichkeitsprädikate wie "gleich schwer" oder " von der gleichen Farbe"; transitive verben wie "lieben", "töten", "unterliegen"; Adjektive wie "verwandt"; Präpositionen wie "unter" oder "während"; usw. Genau wie bei den einstelligen Prädikaten des Monadischen Prädikatenkalküls, geht es bei den zweistelligen Prädikaten nur darum, für welche Paare von Elementen sie gelten. Miot anderen Worten, es genügt uns als "Interpretation" eines zweistelligen Prädikats R die Menge von all den Paaren (a,b), so daß a in der Beziehung R zu b steht.

Für die Semantik zweistelliger Prädikate brauchen wir also Mengen von Paaren. Damit wir solche Mengen definieren können, brauchen wir den Begriff eines *Paares* von Elementen. Es stellt sich also die Frage: Was ist, für beliebige Elemente a und b, das Paar dieser beiden Elemente?

Die Antwort, die man heutzutage auf diese Frage gibt, ist eine der Spuren des im ersten Abschnitt zur Mengenlehre erwähnten Programms, das mathematische Begriffe auf mengentheoretische zu reduzieren versucht. In dem jwetzigen Fall stellt sich für ein solches Programm die Aufgabe, für a und b eine Menge konstruieren, die geeignet ist, die RTolle des geordneten Paares (A,b) zu übernehmen.

Dazu muß diese Menge die richtigen Eigenschaften besitzen. Es gibt zwei davon. Erstens soll aus der Menge eindeutig hervorgehen, welche die Elemente a und b sind, deren Paar sie repräsentiert. Aber das ist noch nicht genug. Es soll nicht nur eindeutig sein, um welche zwei Elemente es sich handelt, sondern auch darum, welches von ihnen als das erste und welches als das zweite Element des Paares zu betrachten ist. Mit anderen Worten, wir wollen einen Unterschied zwischen dem Paar (a,b) und dem Paar (b,a). (Dies ist deswegen notwendig, weil zweistellige Beziehungen im allgemeinen nicht symmetrisch sind: eine Beziehung kann zwischen a und b bestehen, ohne daß sie auch zwischen b und a besteht. Eins von zahllosen Beispielen ist die Inklusionsbeziehung zwischen Mengen; im allgemeinen folgt, wie wir gesehen haben, aus $A \subseteq B$ nicht, daß $B \subseteq A$.)

Wegen dieser zweiten Anforderung können wir das Paar (a,b) nicht einfach als die Zweiermenge {a,b} definieren. Denn zwar geht aus {a,b} eindeutig hervor, daß die Elemente des "Paares" a und b sind, eine Reihung von ihnen wird aber nicht vermittelt. Die Menge {a,b} ist vollständig dadurch charakterisiert, daß sie aus den Elementen a und b besteht. Deshalb ist auch {a,b} = {b,a}. Die Menge {a,b} wird denn auch oft als das *ungeordnete Paar von* a und b bezeichnet.

Eine geeignete Paardefinition muß also eine gewisse Asymmetrie zwischen a und b in die als Paar dienende Menge einbauen. Es gibt viele Möglichkeiten, dies zu tun. Die heutzutage am meisten verwendete verdanken wir dem polnishschen Mathematiker Kuratowski:

Def. 10 Das *geordnete Paar von* a und b, $\langle a,b\rangle$, ist die Menge {{a}, {a,b}}.

Um zu zeigen, daß diese Definition den Anforderungen entspricht, müssen wir znachweisen, daß {{a}, {a,b}} sowohl die Identität als auch die Anordnung von a und b bestimmt . Mit anderen Worten, es muß bewiesen werden, daß zwei solche Mengen {{a}, {a,b}} und {{c}, {c,d}} nur dann identisch sind, wenn a = c und b = d.

Thm.47 Wenn {{a}, {a,b}} = {{c}, {c,d}}, dann a = c und b = d.

Beweis. Nehmen wir an, daß

(*) $\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$,

Wir unterscheiden zwei Fälle: (i) a = b; und (ii) $a \neq b$.

(i). Wir argumentieren wie folgt. Wenn a = b, dann ist {a,b} dieselbe Menge wie {a}. (Beide haben a als ihr einziges Element!). Also ist {{a}, {a,b}} dieselbe Menge wie {{a},{a}} und diese ist wiederum dieselbe wie {{a}}. (Dies ist die Menge, deren einziges Element {a} ist.) Also ist die Menge links vom Gleichheitszeichen in (*) eine Einermenge. Dann ist also die auf der rechten Seite erwähnte Menge ebenfalls eine Einermenge. Das bedeutet, daß {c} = {c,d}, was wiederum nur möglich ist, wenn c = d. Überdies muß, da die Mengen links und rechts identisch sind, {c} ein Element von der Menge auf der linken seite, also von {{a}}, sein. Deshalb ist {c} mit {a}, dem einzigen Element dieser Menge, identisch, was impliziert, daß c = a. Also sind in diesem Fall alle Elemente a, b, c, d gleich. Insbesondere gilt a = c und b = d.

(ii). Wenn a ≠ b, dann ist {a,b} eine Zweiermenge. Also ist {a,b} verschieden von der Einermenge {a} und somit besteht {{a}, {a,b}} aus zwei Elementen. Dann besteht also auch {{c}, {c,d}} aus zwei Elementen (denn sie ist ja dieselbe Menge wie {{a}, {a,b}}). Also müssen {c} und {c,d} verschieden sein, was impliziert, daß c ≠ d. Da {a} Element der Menge auf der linken Seite ist, ist {a} auch Element der Menge auf der rechten Seite. Also ist entweder {a} = {c} oder {a} = {c,d}. Die zweite Möglichkeit ist ausgeschlossen, weil {a} eine Einermenge und {c,d} eine Zweiermenge ist. Also bleibt nur die erste Möglichkeit. Daraus folgt, daß a = c. Überdies ist auch die Menge {a,b} ein Element von der Menge auf der linken und somit auch von der Menge auf der rechten Seite. Das bedeutet wiederum, daß {a,b} = {c} oder {a,b} = {c,d}. Diesmal scheidet die erste Möglichkeit aus, weil a,b} aus zwei Elementen besteht. Aus der zweiten Möglichkeit folgt, daß b Element von {c,d} ist. Also b = c oder b = d. b = c würde aber bedeuten, daß b = a, was der Annahme widersprechen würde. Also b = d.

Nachdem wir definiert haben, was wir unter einem geordneten Paar <a,b> verstehen, können wir den allgemeinen Begriff einer *Relation* einführen.

<u>Def. 11</u> Eine *(zweistellige) Relation* ist eine Menge von geordneten Paaren.

N.B Es sei nochmal darauf hingewiesen, daß diese Definition die Bedeutung im üblichen Sinn des Wortes ausklammert. Betrachten wir nochmal die Beziehung "hat dieselbe Farbe wie" und seien a und b zwei Objekte, die jetzt in dieser Beziehung zueinander stehen. Dann gehört das Paar <a,b> zu der von dieser Beziehung zu diesem Zeitpunkt bestimmten Relation - von der Menge, also, aller Paare <x,y>, so daß x und y zu dem jetzigen Zeitpunkt dieselbe Farbe haben. Die Relation sagt aber nichts darüber aus, welche Objekte zu früheren bzw. späteren Zeiten in der Beziehung zueinander standen oder stehen werden. Diese Information ist in anderen Relationen enthalten, und zwar den Mengen von Paaren <x,y>, so daß die Beziehung zwischen x und y zu dem relevanten Zeitpunkt bestand oder bestehen wird.

Bezüglich Relationen (im soeben definierten Sinn) gibt es eine Anzahl von bekannten und oft verwendeten Begriffen, von denen wir jetzt einige einführen und kurz diskutieren wollen.

Zuerst die Begriffe der *Domäne*, der *Kodomäne* und des *Feldes* einer Relation R. Die Begriffe *Domäne* und *Kodomäne* sind insbesondere dann sinnvoll, wenn R eine Relation zwischen Objekten von verschiedenen Typen ist. Die Relation "y iwar einmal der Wohnsitz von x" ist eine solche, die Objekte, die als erstes Argument der Relation - also als mögliche Werte von y - auftreten können, sind Gemeinden, während als zweites Argument nur Personen in Betracht kommen. Wir beschreiben diesen Sachverhalt, indem wir sagen, daß die *Domäne* von R aus Gemeinden und die *Kodomäne* aus Personen besteht. Präziser formuliert: Die *Domäne* einer Relation R ist die Menge aller Entitäten a, für die es ein b gibt so, daß <a,b> zu R gehört und die *Kodomäne* ist die Menge aller b für die es ein a gibt so, daß <a,b> zu R gehört.

Neben der Domäne und der Kodomäne von R ist oft auch der Begriff des *Feldes* von R nützlich. Das *Feld von* R (wir haben hier die buchstäbliche Übersetzung des englischen Wort *field* gewählt!) ist die Vereinigung von Domäne und Kodomäne.

Def. 12 Sei R eine Relation.

(i) die *Domäne von* R, Dom(R), ist die Menge
$\{x: (\exists y) \langle x,y\rangle \, \varepsilon \, R\}$

(ii) die *Kodomäne von* R, Ran(R), ist die Menge
$\{y: (\exists x) \langle x,y\rangle \, \varepsilon \, R\}$

(iii) das *Feld von* R, Fld(R), ist die Menge $\mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Ran}(R)$

N. B. Zur Rechtfertigung von Def. 12 bedarf es eigentlich einer Beweisführung, daß Domäne, Kodomäne und Feld einer willkürlichen Relation immer existieren. Wir verzichten hier auf diesen Nachweis.

Die Begriffe "Domäne von" und "Kodomäne von" sind Operationen, die aus einer Relation R die Mengen Dom(R) und Ran(R) bilden (welche im allgemeinen keine Relationen sind). Umgekehrt gibt es eine Operation, das sog. *Kartesische Produkt*, die aus zwei Mengen A und B eine bestimmte Relation S bildet mit der Eigenschaft, daß $A = Dom(S)$ und $B = Ran(S)$. D(Diese Operation ist nach dem französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes (lat. Cartesius;1596 -1650) benannt.) Das Kartesische Produkt von A und B ist die umfassenste Relation mit Domäne A und Kodomäne B - die Menge von allen Paaren $\langle a,b \rangle$, so daß $a \varepsilon A$ und $b \varepsilon B$.

<u>Def. 13</u> Seien A und B Mengen. Das *Kartesische Produkt von* A und B, $A \otimes B$, ist die Relation $\{\langle a,b \rangle: a \varepsilon A \ \& \ b \varepsilon B\}$.

Wenn $B = A$, schreibt man oft statt $A \otimes A$ auch $A^2$.

Das folgende Theorem besagt, daß $A \otimes B$ in der Tat die umfassendste Relation mit dieser Domäne und Kodomäne ist.

<u>Thm.48</u> Sei R eine Relation. Dann gilt: $R \subseteq Dom(R) \otimes Ran(R)$.

Dei "Quadratierung" $A^2$ von A können wir als einstellige Operation betrachten, die der Menge A die umfassendste Relation zuordnet, von der A sowohl die Domäne als auch die Kodomäne ist. Es gibt noch eine zweite oft verwendete Operation, die der Menge A ebenfalls eine Relation mit A als Domäne und Kodomäne zuordnet. Diese ist die *Identitätsoperation*. Diese Operation ordnet jeder Menge A die *Identität auf* A zu, d. h. die Relation, die zwischen a und b dann gilt, wenn $a \varepsilon A$ und $b = a$.

<u>Def. 14</u> Sei A eine Menge. Die *Identität auf* A, Id(A), ist die Relation:

$$\{\langle a,a \rangle: a \varepsilon A\}$$

##

Zunächst einige Eigenschaften von Relationen. Diesmal schicken wir die formalen Definitionen der Diskussion voraus.

<u>Def. 15</u> Sei R eine Relation, A eine Menge.

(i) R ist *reflexiv relativ zu* A gdw. für alle $a \varepsilon A$ $\langle a,a \rangle \varepsilon R$
(ii) R ist *irreflexiv relativ zu* A gdw. für alle $a \varepsilon A$ $\langle a,a \rangle \notin R$
(iii) R ist *symmetrisch relativ zu* A gdw. für alle $a, b \varepsilon A$,
wenn $\langle a,b \rangle \varepsilon R$, dann $\langle b,a \rangle \varepsilon R$

(iv) R ist *antisymmetrisch relativ zu* A gdw. für alle a, b ε A, wenn <a,b> ε R, dann <b,a> ∉ R
(v) R ist *asymmetrisch relativ zu* A gdw. für alle a, b ε A, wenn <a,b> ε R, und <b,a> ε R, dann a = b.
(vi) R ist *transitiv relativ zu* A gdw. für alle a, b, c ε A, wenn <a,b> ε R und <b,c> ε R, dann auch <a,c> ε R
(vii) R ist *intransitiv relativ zu* A gdw. für alle a, b, c ε A, wenn <a,b> ε R und <b,c> ε R, dann <a,c> ∉ R
(viii) R ist *zusammenhängend relativ zu* A gdw. für alle a, b ε A, entweder <a,b> ε R oder <b,a> ε R
(ix) R ist *schwach zusammenhängend relativ zu* A gdw. für alle a, b ε A, entweder <a,b> ε R oder <b,a> ε R oder a = b
(x) R ist *euklidisch relativ zu* A gdw. für alle a, b, c ε A, wenn <a,b> ε R und <a,c> ε R, dann <b,c>

Für die Mehrheit der oben definierten Eigenschaften macht die Relativierung auf die Menge A nur dann einen Unterschhied, wenn A eine echte Teilmenge von Fld(R) ist; wenn A über Fld(R) hinausgeht, ist die Relativierung in diesen Fällen ohne Konsequenzen. Es geht hier um die Eigenschaften von (ii) - (vii) und (x). Auf diese Eigenschften bezieht man sich oft in einem absolutem Sinne, also ohne R eferenz auf eine Bezugsmenge A. Z.B sagt man oft von einer Relation R, daß sie irreflexiv, symmetrisch, intransitiv, usw. ist. Gemeint wird dann, daß R die erwänte Eigenschaft relativ zu der Menge Fld(R) besitzt.[14]

Wir fassen zusammen:

<u>Def. 16</u> Sei R eine Relation. Für jede der in Def. 13 (i) - (x) definierten Eigenschaften E gilt:

R hat E gdw. R hat E relativ zu Fld(R)

Zwischen den in Def. 13 spezifizierten Eigenschaften gibt es gewisse systematische Beziehungen. Offensichtlich ist, daß wenn R zusammenhängend relativ zu A ist, R auch schwach zusammenhängend relativ zu A sein muß. Ebenso impliziert die Asymmetrie von R relativ

---

14 Auch in den übrigen Fällen (i), (viii) und (ix) verwendet man den dort definierten Eigenschaftsbegriff oft in diesem absoluten Sinne, aber in diesen Fällen ist es wichtig, sich im klaren zu sein, was dies bedeutet. Z. B. ist die Bedeutung der Behauptung, R sei reflexiv, daß jedes a, das überhauptim Feld von R vorkommt, auch in der Relation R zu sich selbst steht.

zu A ihre Antisymmetrie. Das vielleicht bekannteste Beispiel einer weiteren, immer noch recht einfachen Beziehung ist die von Thm. 41.

Thm.49 Wenn R asymmetrisch relativ zu A, dann ist R auch irreflexiv relativ zu A.

Beweis. Sei $a \in A$. Wir müssen zeigen, daß $\langle a,a \rangle \notin R$. Nehmen wir dazu an, es sei $\langle a,a \rangle \in R$. Dann gilt, wegen der Asymmetrie von R relativ zu A, daß die "Umkehrung" von dem Paar $\langle a,a \rangle$ nicht zu R gehört. Aber in disem Fall ist die "Umkehrung" wieder $\langle a,a \rangle$. Also folgt $\langle a,a \rangle \notin R$. Damit haben wir aus der Annahme, daß $\langle a,a \rangle \in R$ einen diese Annahme direkt widersprechenden Schluß abgeleitet. Die Annahme ist damit widerlegt und es gilt "$\langle a,a \rangle \in R$" nicht. Also $\langle a,a \rangle \notin R$.

Die nächsten beiden Theoreme beziehen sich auf zwei weitere Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Def. 13. Die Beweise sind dem Leser überlassen.

Thm.50 Wenn R reflexiv und intransitiv relativ zu A ist, dann ist R asymmetrisch relativ zu A.
Thm.51 Wenn R reflexiv und euklidisch relativ zu A ist, dann ist R symmetrisch und transitiv relativ zu A.

Die praktische Bedeutung der Eigenschaften von Def. 13 liegt zum großen Teil in den Möglichkeiten ihrer Kombination. Insesondere gibt es zwei Typen von Relationen, die in der Logik und ihren Anwendungen (einschließlich ihrer Anwendungen in der Informatik, Linguistik und Computerlinguistik) immer wieder eine Rolle spielen und die durch bestimmte Konjuktionen dieser Eigenschaften charakterisiert werden.. diese sind (i) die Äquivalenzrelationen und (ii) die Ordnungsrelationen.

Def. 17 Sei R eine Relation. R ist *eine Äquivalenzrelation auf* der Menge A, wenn R die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) R ist reflexiv relativ zu A
(b) R ist symmetrisch relativ zu A
(c) R ist transitiv relativ zu A.

Äquivalenzrelationen sind, wie der Name suggeriert, Beziehungen, die zwischen zwei Objekten bestehen, wenn diese unter einem bestimmten Gesichtspunkt äquivalent sind. Biespiele sind schon obern erwähntn Beziehungen "ist genau so groß wie" oder "hat dieselbe Farbe wie". Aus der Perspektive dieser intuitiven Beschreibung leuchtet ein, daß jede Äquivalenzrelation R auf einer Menge A diese Menge in "Äquivalenzklassen" unterteilt. Jede dieser Äquivalenzklassen besteht aus Elementen von A, die unter dem für R relevanten Gesichtspunkt miteinander äquivalent sind. Ist zum Beispiel R die Beziehung "von derselben Farbe", so besteht jede Äquivalenzklasse bzgl. R aus Elementen von A, die eine bestimmte, innerhalb von A vertretene Farbe besitzen.

Jedes Element a von A erzeugt eine von ihm bestimmte Äquivalenzklasse. Diese besteht aus all den Elementen von A, zu denen a in der Relation R steht. Wir bezeichnen diese Klasse als $[a]_R$. Selbstverständlich gilt, da R reflexiv auf A ist, $a \varepsilon [a]_R$. Daraus folgt, daß jedes $a \varepsilon A$ zu einer der Äquivalenzklassen gehört. Also gilt, daß $A \subseteq \bigcup\{[a]_R: a \varepsilon A\}$. Da umgekehrt jedes $[a]_R \subseteq A$, gilt umgekehrt auch $\bigcup\{[a]_R: a \varepsilon A\} \subseteq A$.

Die Äquivalenzklassen haben überdies die Eigenschaft, daß sie sich gegenseitig ausschließen: Wenn $a, b \varepsilon A$, so gilt entweder $[a]_R = [b]_R$ oder sonst $[a]_R \parallel [b]_R$. Denn es gilt entweder (i) $\langle a,b\rangle \varepsilon R$ oder (ii) $\langle a,b\rangle \not\varepsilon R$. Im ersten Fall gilt wegen der Symmetrie und Transitivität von R, daß für alle $c \varepsilon A$, $\langle a,c\rangle \varepsilon R$ gdw. $\langle b,c\rangle \varepsilon R$. Also ist $[a]_R = [b]_R$. Im zweiten Fall gilt: für willkürliches $c \varepsilon A$, daß wenn $\langle a,c\rangle \varepsilon R$, dann $\langle b,c\rangle \not\varepsilon R$; denn $\langle b,c\rangle \varepsilon R$ würde zusammen mit aus $\langle a,c\rangle \varepsilon R$ wegen der Symmetrie und Transitivität von R folgen, daß $\langle a,b\rangle \varepsilon R$. Aber dies widerspräche unserer Annahme.

Wir fassen die obigen Beobachtungen in der nächsten Definition und dem ihr folgenden Theorem zusammen.

<u>Def. 18</u> Sei R eine Relation, a irgendein Objekt. Unter $[a]_R$ verstehen wir die Menge:

$$[a]_R = \{b: \langle a,b\rangle \varepsilon R\}$$

<u>Thm.52</u> Sei R Äquivalenzrelation auf der Menge A. Dan gilt:

(i) $A = \bigcup\{[a]_R: a \varepsilon A\}$

(ii) Wenn $a,b \varepsilon A$, dann entweder $a]_R = [b]_R$ oder $[a]_R \parallel [b]_R$.

Unter den Äquivalenzrelationen auf A zählen insbesondere auch die oben explizit eigeführten Relationen $A^2$ und Id(A). Und zwar ist Id(A) die kleinste und $A^2$ die größte der Äquivalenzrelationen auf A.

Thm.53 Sei A eine Menge.

(i) Id(A) und $A^2$ sind Äquivalenzbeziehungn auf A.

(ii) Wenn R Äquivalenzrelation auf A ist, dann gilt:
$\mathrm{Id}(A) \subseteq R \subseteq A^2$.

Der zweite hier zu erwähnende Relationstyp ist der der Ordnungsrelationen. Im Gegensatz zum Typ der Äquivalenzbeziehungen geht es hier eigentlich nicht um einen einzigen Typ, sondern um eine Familie von verwandten Relationstypen. Zunächst unterscheiden wir zwischen vier Typen, die sich aus den möglichen Kombinationen von zwei voneinander unabhängigen Unterscheidungen ergeben - einerseits der Unterscheidung zwischen *partiellen* und *vollständigen* (oder *linearen*) Ordnungen und andererseits der zwischen *starken* uns *schwachen* Ordnungsrelationen.

Wir definieren zuerst die starken und schwachen partiellen Ordnungen.

Def. 19 Sei R eine Relation, A eine Menge.

(a) R ist eine *schwache partielle Ordnung von* A gdw

(i) R ist reflexiv relativ zu A
(ii) R ist antisymmetrisch relativ zu A
(iii) R ist transitiv relativ zu A

(b) R ist eine *starke partielle Ordnung von* A gdw

(i) R ist asymmetrisch relativ zu A
(ii) R ist transitiv relativ zu A

Wie üblich kann man von diesen Begriffen auch einen absoluten Gebrauch machen, in dem die Menge A nicht erwähnt wird. In solchen Fällenb wird dann A wiederum mit Fld(R) identifiziert. So bedeutet "R ist eine schwache/starke partielle Ordnung", daß R eine Relation ist, die

die in Def.19.a bzw. Def.19.b erwähnten Eigenschaften relativ Fld(R) besitzt.

Zwischen schwachen und starken partiellen Ordnungen besteht ein einfacher systematischer Zusammenhang. Aus einer Relation des ersten Typs läßt sich eine entsprechende Relation des zweiten Typs bilden; und umgekehrt läßt sich aus einer des zweiten Typs eine entsprechende Relation des ersten Typs ableiten. Wenn R eine schwache partielle Ordnung von A ist, dann ist R \ Id(A) die entsprechende starke partielle Ordnung von A, die mit R immer übereinstimmt, wenn es um die Ordnung von zwei verschiedenen Elemente von A geht; und ist R eine starke Ordnung, so entspricht ihr in einem ähnlichen Sinne die schwache Ordnung $R \cup Id(A)$.

Thm.54 (i) Sei R eine schwache partielle Ordnung von A. Dann ist R \ Id(A) eine starke partielle Ordnung von A und es gilt für alle a,b ε A, so daß $a \neq b$:

$$\langle a,b\rangle \in (R \setminus Id(A)) \text{ gdw } \langle a,b\rangle \in R$$

(ii) Sei R eine starke partielle Ordnung von A. Dann ist $R \cup Id(A)$ eine schwache partielle Ordnung von A und es gilt für alle a,b ε A, so daß $a \neq b$:

$$\langle a,b\rangle \in (R \cup Id(A)) \text{ gdw } \langle a,b\rangle \in R$$

Der Unterschied zwischen partiellen und vollständigen Ordnungen ist nicht wie der zwischen starke und schwachen Ordnungen einer zwischen Typen, die sich gegenseitig ausschließen. Vielmehr bilden die vollständigen Ordnungen einen Subtyp der partiellen Ordnungen. Vollständige Ordnungen sind partielle Ordnungen mit der Eigenschaft, daß zwischen zwei verschiedenen Elementen immer eine Ordnungsbeziehung besteht. Formal bedeutet dies, daß vollständige Ordnungen die Eigenschaft des schwachen Zusammenhängens von Def. 15 besitzen. Wir definieren entsprechend

Def. 20 Sei R eine Relation, A eine Menge.

(a) R ist eine *schwache vollständige Ordnung von* A gdw

(i) R eine schwache partielle Ordnung von A ist
(ii) R schwach zusammenhängend relativ zu A ist.

(b) R ist eine *starke vollständige Ordnung von* A gdw

(i) R eine starke partielle Ordnung von A ist
(ii) R schwach zusammenhängend relativ zu A ist.

N.B. In der Definition von dem Begriff einer starken vollständigen Ordnung hätten wir auch fordern können, daß R zusammenhängend relativ zu A ist. Da starke partielle Ordnungen irreflexiv sind, sind für sie die Eigenschaften "zusammenhängend" und "schwach zusammenhängend" äquivalent.

Klassische Beispiele von vollständigen Ordnungen sind die wohlbekannten Ordnungsbeziehungen zwischen Zahlen. So sind die Beziehungen "kleiner als" und "größer als" starke vollständige Ordnungen auf der Menge der natürlichen Zahlen (0, 1, 2, ...). (Übrigens nicht nur auf der Menge der natürlichen Zahlen, sondern auch auf der Menge der (positiven und negativen) ganzen Zahlen (wobei -2 als kleiner als -1 gilt, usw.), auf der Menge der rationalen Zahlen (Zahlen der Form p/q, mit ganzen Zahlen p und q) sowie auf noch weiteren Zahlenmengen.) Die entsprechenden schwachen Ordnungsbeziehungen sind "kleiner oder gleich" ($\leq$) und "größer oder gleich" ($\geq$).

Beispiele von partiellen Ordnungen, die nicht vollständig sind, gibt es viele, und zum Teil sind diese Beispiele sehr unterschiedlich. Ein Beispiel einer schwachen partiellen Ordnungsrelation aus der Zahlentheorie ist die Beziehung "teilbar durch" zwischen positiven ganzen Zahlen. Es ist leicht verifizierbar, daß diese Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, und sie ist natürlich nicht vollständig, denn es gibt Kombinationen von Zahlen m und n, so daß weder m durch n noch n durch m teilbar ist. (Jedes Paar von Primzahlen - 2 und 3, 2 und 5, 3 und 5, usw. - ist eine solche Kombination!) Ein Beispiel aus der Logik ist die Beziehung "ist eine Teilformel von" (auf der Menge aller Formeln der Aussagenlogik, auf der Menge aller Formeln der Monadischen Prädikatenlogik, usw.). Wenn wir jede Formel auch als "Teilformel" von sich selbst betrachten, so ist die Beziehung eine schwache Ordnung; ist mit "Teilformel", "echte Teilformel" gemeint, in dem Sinne, in dem keine Formel eine echte Teilformel von sich selbst ist, so haben wir eine starke Relation. Beispiele aus der Mengenlehre sind die Inklusion $\subseteq$ und die strikte Teilmengenbeziehung $\subset$.

In einem intuitiven Sinne sind diese Relationen von der Vollständigkeit recht weit entfernt: Wenn wir zwei willkürliche Zahlen n und m wählen, dann ist es eher wahrscheinlich, daß weder n durch m noch m durch n teilbar sein wird. Bei der Wahl beliebiger Formeln A und B ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie nicht in der Teilformelbeziehung zueinander stehen, womöglich noch größer; ähnliches gilt für beliebig gewählte Mengen A und B. Beispiele von starken partiellen Ordnungen, die der Vollständigkeit viel näher sind, ergeben die meisten Beziehungen, die wir mit Hilfe von Komparativen - "länger als", "schwerer als", "heller als" - ausdrücken. Es ist zu betonen, daß solche Ordnungen im allgemeinen *nicht* vollständig sind - die Zahlenbeziehungen "kleiner als" und "größer als" sind da eher die Ausnahme. Der Grund, warum z.B. die Beziehung "länger als" (auf einer nicht zu kleinen Menge, z.B. der Menge aller Stahlröhren) mit großer Wahrscheinlichkeit nicht vollständig sein wird, ist, daß es voraussichtlich Röhren gibt, die gleich lang sind. Ein Paar von zwei solchen Röhren verletzt die Beziehung des schwachen Zusammenhängens.

Andererseits gibt es auch Relationen, die zwar partielle Ordnungen im Sinne von Def. 19 sind, aber bei denen von einer Ordnung intuitiv gesprochen eigentlich keine Rede sein kann. Die Extremfälle sind die Identitätsbeziehungen Id(A), die nach Def. 19.a als schwache partielle Ordnungen zu betrachten sind, und die leere Relation $\varnothing$, die nach Def.19.b formal als starke partielle Ordnung auf jeder Menge A gilt.

Wir werden später innerhalb der Familie der partiellen Ordnungen noch weitere Typen unterscheiden.

N.B. Der Ausdruck "partielle Ordnung" ist insofern unglücklich, als er suggeriert, daß die von ihr bezeichneten Relationen keine volllständigen Ordnungen sind. Die hier gegebenen Definitionen - sie sind der dominanten Tendenz innerhalb der mengentheoretischen Literatur konform - beinhalten aber das Gegenteil: Vollständige Ordnungen bilden eine besondere Subspezies der partiellen Ordnungen. In der Praxis verwendet man den Ausdruck "partiell" dennoch vorzugsweise nur dort, wo bekannt ist, daß die bezeichnete Ordnung nich vollständig ist. Auch wir werden uns daran halten.

##

Funktionen

Den meisten von uns ist der Begriff einer Funktion aus der Schulmathematik bekannt. Beispiele sind zahlentheoretische Funktionen wie $x^3$, $x^2 + 5x - 3$, der Logarithmus von x, $\sqrt{x}$, usf. In diesem Zusammenhang ist natürlich, Funktionen als Rechenrezepte zu sehen. In manchen Fällen, wie z.B. bei $x^2 + 5x - 3$, enthält der Funktionsausdruck das Rechenrezept, in anderen, wie etwa bei log(x), muß man das Rezept einer begleitenden Erklärung entnehmen - die Theorie des Logarithmus ist, könnte man sagen, weitgehend eine Erklärung und Begründung der Methoden, mit denen die Werte dieser Funktion ermittelt werden können.

In der Logik ist es üblich, von dem Berechnungsaspekt einer Funktion zu abstrahieren und sich ausschließlich auf den Umstand zu beziehen, daß die Funktion jedem Objekt in ihrem Definitionsbereich einen eindeutigen Funktionswert zuordnet- wie sich dieser Wert berechnen läßt, ist ein zusätzliches Problem, das für die Frage: "Was ist eine Funktion?" nicht entscheidend ist. Es gibt mehrere Gründe für einen solchen Funktionsbegriff, der von Berechnungsfragen abstrahiert. Der wichtigste Grund ist wohl der, daß wir den Funktionsbegriff in vielen Bereichen anwenden möchten, wo das Konzept der Berechnung von Funktionswerten entweder überhaupt nicht anwendbar ist oder wo zwar das Konzept zwar theoretisch einen Sinn macht, aber es für viele Funktionen dennoch kein Berechnungsverfahren gibt und auch nicht geben kann.[15] (Ein Bereich, in dem es Funktionen gibt, für die das Konzept eines Berechnungsverfahrens keine offensichtliche Anwendung hat, ist die Mengenlehre selbst. So können wir z.B. die Potenzmengen- und die Vereinigungs-Operation als Funktionen betrachten, die jeder Menge X eine andere Menge - $P(X)$ bzw. $\bigcup X$ -als Wert zuordnen. Wenn X endlich ist, läßt sich mit dem Begriff der Berechnung von $P(X)$ und $\bigcup X$ noch ein guter Sinn verbinden. Ist aber X unendlich, so verliert die Idee einer Wertberechnung jeden greifbaren Halt.)

Nach dieser abstrakten Vorstellung ist eine Funktion nichts weiter als eine eindeutige Zuordnung von "Werten" zu "Argumenten". Sie wird somit ganz durch die Menge aller Paare $\langle a,b \rangle$ charakterisiert, für die a ein mögliches Argument der Funktion und b der entsprechende Wert ist. Damit reduziert sich der Funktionbegriff auf den eines besonderen Relationstyps: Funktionen sind Relationen mit der Eigenschaft, daß das erste Element eines zu ihnen gehörenden Paares das zweite immer

---

[15] Eines der überraschendsten Ergebnisse der modernen Logik ist, daß es wohldefinierte arithmetische Funktionen - d.h. Funktionen, die natürlichen Zahlen natürliche Zahlen zuordnen - gibt, für die die Annahme, es gäbe ein Berechnungsverfahren für sie, zu einem Widerspruch führt. Dieses Ergebnis beruht in seiner Essenz auf dem 1930 von Kurt Gödel bewiesenen Unvollständigkeitssatz, ist aber in der spezifischen Form, in der wir es hier formuliert haben, auch den Arbeiten von Alonzo Church zu verdanken.

eindeutig bestimmt - wenn $\langle a,b \rangle$ Element der Relation ist, dann gibt es kein weiteres Element $\langle a,c \rangle$ der Relation mit $c \neq b$.

Def. 21 Sei R eine Relation, A eine Menge. R ist *eine Funktion auf* A (oder auch: R ist *funktional auf* A) gdw. für alle a, b, c $\in$ A gilt: wenn $\langle a,b \rangle \in R$ und $b \neq c$, dann $\langle a,c \rangle \notin R$.

N. B. Ist F eine Funktion, so schreibt man oft "F(a) = b" statt "$\langle a,b \rangle \in F$".

Das erste Element eines zu einer Funktion gehörigen Paares wird als *Argument der* Funktion und das zweite Element als (diesem Argument entsprechender) *Funktionswert* bezeichnet: ist $\langle a,b \rangle$ ein Element der Funktion F, dan ist a ein *Argument von* F und b der *Funktionswert*, der a entspricht. Im Einklang mit dieser Terminologie spricht man bei Funktionen F auch von dem *Argumentbereich* der Funktion F (dieser ist dasselbe wie Dom(F)) und dem *Wertbereich von* F (= Ran(F))

Unter den Funktionen gibt es drei wichtige Teilklassen, die Klasse der *Injektionen*, die der *Surjektionen* und die der *Bijektionen*. *Injektionen* sind Funktionen, bei denen nicht nur das Argument eindeutig den Wert, sondern umgekehrt auch der Wert immer eindeutig das Argument bestimmt. Also, wenn F eine Injektion, dann gilt ohne Ausnahme: wenn $\langle a,b \rangle \in F$ und $c \neq a$, dann $\langle c,b \rangle \notin F$.

Der Begriff einer *Surjektion* macht nur in einem Kontext Sinn, in dem der "intendierte Wertbereich" der Funktion F - der Bereich, also, zu dem die Funktionswerte gehören - unabhängig identifizierbar oder vorgegeben ist. Ist W dieser intendierte Wertbereich, so heißt F *Surjektion relativ zu* W, wenn jedes Element von W in der Tat als Funktionswert vorkommt: Wenn $w \in W$, dann gibt es ein a, so daß $\langle a,w \rangle \in F$.

Drittens ist F eine *Bijektion relativ zu* W, wenn F sowohl eine Injektion als auch eine Surjektion relativ zu W ist.

Jedes dieser drei Begriffe sollte auch noch auf die intendierte Argumentmenge A bezogen werden (vgl. Def. 21). In Def. 22 ist diese zusätzliche Abhängigkeit mitberücksichtigt.

Def. 22 Sei F eine Funktion auf der Menge A, W eine Menge.

(i) F ist eine *Injektion auf* A gdw. für alle a,c $\in$ A und b gilt: wenn $\langle a,b \rangle \in F$ und $c \neq a$, dann $\langle c,b \rangle \notin F$.

(ii) F ist eine *Surjektion von A auf* W gdw. für alle b $\varepsilon$ W gilt: es gibt ein a $\varepsilon$ A, so daß $<a,b>$ $\varepsilon$ F

(iii) F ist eine *Bijektion zwischen A und* W gdw. F
(a) eine Injektion auf A, und
(b) eine Surjektion von A auf W ist.

Operationen auf Relationen.

In diesem Teilabschnitt führen wir zwei oft verwendete Operationen auf Relationen ein.

Die erste ist eine einstellige Operation, die *Inverse* oder *Konverse* einer Relation R. Diese Operation tut nichts weiter als alle Paare der Relation R umzukehren.

Def. 23 Sei R eine Relation. Die *Inverse* (auch: *Konverse*) *von* R, $R^{-1}$, ist die Relation $\{<b,a>: <a,b> \varepsilon R\}$.

Die zweite Operation ist eine zweistellige Operation, das *relative Produkt* der Relationen R und S. Diese Relation gilt zwischen a und c genau dann, wenn es irgendein y gibt, so daß $<a,y>$ $\varepsilon$ R und $<y,c>$ $\varepsilon$ S.

Def. 24 Seien R und S Relationen. Das *relative Produkt* von R und S, R $\circ$ S, ist die Relation $\{<a,c>: (\exists y)(<a,y> \varepsilon R \;\&\; <y,c> \varepsilon S)\}$.

Ein paar Beispiele:

1. Sei R die Relation "kleiner als" auf der Menge der ganzen Zahlen. Dann ist $R^{-1}$ die Beziehung "größer als" auf dieser Menge. Ist S die Beziehung $\geq$ ("größer oder gleich") auf den ganzen Zahlen, dann ist $R^{-1}$ die Beziehung $\leq$. Die Relation $\geq \circ \geq$ ist wiederum $\geq$, die Relationen $\geq \circ >$ und $> \circ \geq$ sind beide wiederum $>$ und die Relation $> \circ >$ läßt sich als "ist mindestes zwei größer als" paraphrasieren (oder auch: n $> \circ >$ m bedeutet "n ist größer als m+1").

2. Sei A eine Menge von Personen; sei R die "Eltern-Relation" innerhalb von A (d.h. die Relation $\subseteq A^2$, die zwischen zwei Personen a und b aus A genau dann besteht, wenn a entweder Vater oder Mutter von b ist; und sei S die "Geschwister"-Relation $\subseteq A^2$ (also die Beziehung, die zwischen

Individuen a und b aus A besteht, wenn a und b Geschwister sind). In diesem Fall ist $R^{-1}$ die Relation "Kind von" auf A, während $S^{-1}$ wieder die Geschwister-Relation ist. Die Relation $R \circ R$ ist die "Großeltern"-Relation: wenn a und b in dieser Beziehung zueinander stehen, dann ist a entweder Großmutter oder Großvater von b, und wenn die Menge unter Verwandtschaftsbeziehungen abgeschlossen ist (d. h. daß mit jedem a in A auch alle Verwandten von a zu A gehören, so ist $R \circ R$ genau die Beziehung "Großmutter oder Großvater" auf der Menge A. Die Relation $S \circ R$ ist die, welche zwischen a und c besteht, wenn es ein b in A gibt, so daß a und b Geschwister sind, während c ein Kind ist von b. In einem solchen Fall ist also a Onkel oder Tante von c; und ist wiederum A unter Verwandschaftsbeziehungen abgeschlossen, dann ist $S \circ R$ genau diese disjunktive Beziehung. Es ist zu beachten, daß die Beziehung $R \circ S$ nicht dieselbe wie $R \circ S$ ist. $R \circ S$ gilt zwischen a und c wenn es ein b gibt, so daß b und c Geschwister sind und b Kind ist von a. Das bedeutet, daß c ebenfalls Kind ist von a, aber unter der zusätzlichen Bedingung, daß c einen Bruder oder eine Schwester hat.

Es gibt eine Vielfalt von systematischen Beziehungen zwischen den Operationen $^{-1}$ und $\circ$ und früher eingeführten Operationen, Relationen und Eigenschaften . Einge von diesen sind in den folgenden Theoremen enthalten:

<u>Thm.55</u> (i) $Dom(R^{-1}) = Ran(R)$; $Ran(R^{-1}) = Dom(R)$; $Fld(R^{-1}) = Fld(R)$

(ii) $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$

(iii) Ist R eine Relation, dann gilt $(R^{-1})^{-1} = R$

<u>Thm.56</u> (i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

(ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

<u>Thm.57</u> $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

<u>Thm.58</u> $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

<u>Thm.58</u> (i) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

(ii) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$

<u>Thm.59</u> $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

<u>Thm.60</u> Sei R eine Relation.

(i) $R^{-1} \subseteq R$ gdw. R symmetrisch

(ii) $R^{-1} \| R$ gdw. R asymmetrisch

(iii) $R^{-1} \cap R \subseteq Id(Fld(R))$ gdw. R antisymmetrisch
(iv) $R \circ R \subseteq R$ gdw. R transitiv
(v) $R \circ R \parallel R$ gdw. R intransitiv
(vi) $R \cup R^{-1} = Fld(R)$ gdw. R zusammenhängend
(vii) $R \cup R^{-1} \cup Id(Fld(R)) = Fld(R)$ gdw. R schwach zusammenhängend

<u>Thm.61</u> Sei F eine Funktion.
(i) F ist eine Injektion gdw. $F^{-1}$ eine Funktion ist.

<u>Thm.62</u> Seien F, G Funktionen.
(i) $F \circ G$ ist eine Funktion.
(ii) Wenn $Ran(F) \subseteq Dom(G)$, dann $(Dom(F \circ G) = Dom(F)$.
(iii) Wenn $Dom(G) \subseteq Ran(F)$, dann $Ran(F \circ G) = Ran(G))$.
(iv) Wenn F und G Injektionen, dann ist $F \circ G$ eine Injektion.

## <u>Tupeln.</u>

In Def. 11 wurden zweistellige Relationen als Mengen von geordneten Paaren definiert. In der Logik sowie in der natürlichen Sprache haben wir es aber oft nicht nur mit zweistelligen, sondern auch mit dreisteliigen, vierstelligen und soger mit Relationen noch größerer Stelligkeit zu tun - mit Beziehungen also, die zwischen jeweils drei Argumenten gelten (wie z.B. die Beziehung "x liegt zwischen y und z") zwischen jeweils vier Argumenten "x ist um genau so viel größer als y, wie z größer als u ist"), usw. Nach dem schon bei den zweistelligen Relationen angewandten Prinzip, nur die Extensionen von Beziehungen zu berücksichtigen, sollten für unsere Zwecke dreistellige Relationen als Mengen von "Dreitupeln" definiert werden. Dabei sollen Dreitupeln eine ähnliche Funktion haben wie geordnete Paare bei der Charakterisierung zweistelliger Relationen: Genauso wie es für beliebige Objekte a und b das geordnete Paar $\langle a,b \rangle$ gibt, das a als erstes und b als zweites Element eindeutig identifiziert, so soll für beliebige a, b, c das Dreitupel $\langle a,b,c \rangle$ eindeutig festlegen, das a sein erstes, b sein zweites und c sein drittes Element ist. Analog brauchen für die Definition vierstelliger Relationen Viertupeln, für die Definition fünfstelliger Relationen Fünftupeln, usw.

Die Frage stellt sich also: Wie sind *Dreitupeln*, *Viertupeln*, etc. zu definieren? Es gibt dazu innerhalb der Mengenlehre zwei Verfahren.

Das aus methodologischen Gründen bessere Verfahren - die Gründe, weshalb dieses Verfahren vorzuziehen ist, werden wir hier nicht erläutern - ist ziemlich involviert, da es zuerst eine mengentheoretische Charakterisierung der natürlichen Zahlen 0,1, 2, 3, ... voraussetzt. Sind die natürlichen Zahlen einmal mengentheoretisch eingeführt, so läßt sich für beliebige natürliche Zahl n der Begriff eines *n-Tupels* als eine Funktion definieren, deren Argumentbereich aus den positiven ganzen Zahlen $\leq$ n besteht, und deren Werte die Elemente des Tupels sind. Z. B. wird das Dreitupel <a,b,c> nach diesem Verfahren mit der Funktion {<1,a>, <2,b>, <3,c>} identifiziert.

Ein zweites Verfahren, dessen Implementierung weniger aufwendig ist, definiert die Begriffe eines *Dreitupels*, eines *Viertupels*, usw. "rekursiv", in dem Sinne, daß für jedes n > 2 die Definition des Begriffs "n-Tupel" von dem schon "vorher" definierten Begriff eines "n-1-Tupels" Gebrauch macht. Nach diesem Verfahren wird das Dreitupel der Elemente a, b, c als das geordnete Paar definiert, dessen erstes Element a und dessen zweites Element das geordnete Paar <b,c> ist : <a,b,c> $=_{def}$ <a,<b,c>>. Ebenso definieren wir das Viertupel <a,b,c,d> als das Paar <a, <b,c,d>> (was nach der gerade erwähnten Definition von Dreitupeln dasselbe ist wie <<<a,<b,<c,d>>>); usw. Es ist leicht einzusehen, daß diese Definitionen alle der Anforderung einer eindeutigen Festlegung von Identität und Reihung der Tupelelemente gerecht werden. Dies folgt direkt aus der schon nachgewiesenen Eindeutigkeit der geordneten Paare. Z. B. bestimmt <a,b,c> - das nach der obigen Defintion nichts anderes als <<a,<b,c>> ist - zuerst eindeutig a als erstes Elelement und <b,c> als den Rest des Tupels. <b,c> bestimmt aber seinerseits b eindeutig als das erste und c als das zweite Element des Rests. Damit ist dann b das zweite und c das dritte Element des Tupels insgesamt. Ähnlich folgt die eindeutige Festlegung im Fall von Viertupeln, Fünftupeln, usw.

Seiner Einfachheit halber machen wir hier von dem zweiten Verfahren Gebrauch. Die Definitionen sollten ohne zusätzlichen Kommentar verständlich sein. An der Basis der Hierarchie dieser Definitionen steht die alte Def. 11 vom Begriff "geordnetes Paar". Geordnete Paare bezeichnen wir von jetzt an auch als "Zweitupeln".

Def. 25 (i) Das *Zweitupel der* Elemente a und b ist das geordnete Paar <,a,b>

(ii) Für n > 2 definieren wir:

Das *n-Tupel der* Elemente $a_1, \dots, a_n$, $<a_1, \dots, a_n>$, ist das geordnete Paar $<a_1, <a_2, \dots, a_n>>$

Wie schon gesagt ist eine n-stellige Relation nichts weiter als eine Menge von n-Tupeln. Wir werden für die Modelltheorie der mehrstelligen Prädikatenlogik aber einen relativierten Relationsbegriff benötigen, der einer n-stelligen Relation *auf* einer Menge A: intuitiv ist der Begriff besonders einfach: R ist eine n-stellige Relation auf A wenn die zu R gehörigen n-Tupel ganz aus Elementen von A bestehen. Deshalb definieren wir zuerst:

Def. 26 Sei A eine Menge. Ein n-Tupel $<a_1, \ldots, a_n>$ ist ein Tupel *aus* A, wenn für i = 1, ..., n gilt: $a_i \in A$.

Def. 27 Sei A eine Menge und sei n eine Zahl $\geq 2$.
Eine n-*stellige Relation* ist eine Menge von n-Tupeln aus A.

N.B. Def. 27 subsumiert Def. 11 als den besonderen Fall, in dem n = 2 und A = Fld(R).

## Mehrstellige Prädikate.

Wie wir gesehen haben, läßt sich im Monadischen Prädikatenkalkül wesentlich mehr ausdrücken als im Aussagenkalkül einerseits und im Formalismus der Aristotelischen Syllogismuslehre andererseits. Die Ausdrucksmöglichkeiten des MPK sind dennoch recht beschränkt -sogar nach Hinzunahme der Identität bleibt immer noch sehr vieles, das man unbedingt ausdrücken können sollte, aber von diesem Kalkül nicht korrekt repräsentiert werden kann. Der Grund ist einfach: Im MPK lassen sich keine Relationen darstellen; in fast jeder Form von Information, und insbesondere in den sprachlichen Formen, spielen die aber eine entscheidende Rolle. Damit wir einen Formalismus bekommen, der dieser Tatsache Rechnung trägt, muß der Prädiaktenkalkül um mehrstellige Prädikate erweitert werden.

Wie üblich in Darstellungen der Prädikatenlogik führen wir gleich Prädikate beliebiger Mehrstelligkeit ein (statt schrittweise vorzugehen, indem wir erst zweistellige Prädikate einführen, dann dreistellige, usw.) Der wichtigste Grund dafür ist, daß es aus mathematisch-logischer Sicht kein wesentlicher Unterschied zwischen einem prädikatenlogischen Formalismus besteht, in dem es nur ein- und zweistellige Prädikate gibt, und einem, der auch über Prädikate von mehr als zwei Stellen verfügt.

Grundsätzlich sind diese Formalismen von derselben logischen Komplexität.[16]

Es folgen jetzt einige Beispiele von Sätzen, die sich mit Hilfe von zweistelligen Prädikaten, nicht aber im monadischen Prädikatenkalkül formalisieren lassen. Die Beispiele sind so gewählt, daß gleich auch bestimmte Fragen erkennbar werden, mit denen sich die Übersetzung von natürlichen Sprachen in die Prädikatenlogik auseinanderzusetzen hat. Diese Fragen werden in kurzen Kommentaren zu den jeweiligen Übersetzungen erläutert. Sie deuten im allgemeinen auf eine gewisse Spannung zwischen der Ausdrucksweise der natürlichen Sprache und der formalen Logik hin.

<u>Beispiele.</u>

(1) Karl ist älter als Dieter.
(2) Es gibt einen Studenten, der älter als alle anderen Studenten ist.
(3) Wenn Karl älter ist als Dieter, dann ist Dieter nicht so alt wie Emil.
(4) Ist Emil älter als Karl, dann ist Emil der älteste Student.
(5) Nicht alle Studenten sind klüger als alle Professoren, doch manche Studenten sind klüger als manche Professoren.
(6) Karl mag Emil nicht.
(7) Karl mag keinen Studenten, der klüger ist als er.
(8) Karl ist älter als Dieter aber nicht klüger.
(9) Emil mag Karl und Dieter.
(10) Jeder Student mag einen Professor.
(11) Es gibt einen Professor, den jeder Student mag.
(12) Kein Student mag mehr als zwei Professoren und mindestens ein Student mag überhaupt keinen Professor.
(13) Emil mag nur ältere Studenten.

Seien k, d, und e Individuenkonstanten, die Karl, Dieter und Emil bezeichnen, seien S und P die einstelligen Prädikate "Student" und "Professor" und seien A, K und M 2-stellige Prädikate für die Beziehungen "älter als" , "klüger als" und "x mag y":

---

[16] Überdies hat der auf zweistellige Prädikate beschränkte Formalismus theoretisch gesprochen dieselben Ausdrucksmöglichkeiten wie die Formalismen, die mehr-als-zweistellige Prädikate enthalten, denn solche Prädikate lassen sich mit Hilfe von zweistelligen Prädikaten mittels eines "Kodierungstricks" simulieren. Auch aus der Perspektive der Anwendung gibt es also zwischen diesen Formalismen keinen grundsätzlichen Unterschied. Wenn es aber um die *Transparenz* der Informationsdarstellung geht, empfielt sich oft der reichere Formalismus, in dem auch mehr-als-zweistellige Prädikate verfügbar sind.

| | |
|---|---|
| k: | Karl |
| d: | Dieter |
| e: | Emil |
| S(x): | "x ist Student" |
| P(x): | "x ist Professor" |
| A(x, y): | "x ist älter als y" |
| K(x, y): | "x ist klüger als y" |
| M(x, y): | "x mag y" |

Die Sätze (1) - (13) können nach diesem Schlüssel wie folgt übersetzt werden:

(1) Karl ist älter als Dieter.
(1') $A(k,d)$

(2) Es gibt einen Studenten, der älter als alle anderen Studenten ist.
(2') $(\exists x)(S(x) \ \& \ (\forall y)(S(y) \ \& \ y \neq x \rightarrow A(x,y)))$

(3) Wenn Karl älter ist als Dieter, dann ist Dieter nicht so alt wie Emil.
(3') $A(k,d) \rightarrow A(e,d)$

<u>Kommentar:</u> Bei der Formalisierung von (3) haben wir die logischen Beziehung zwischen den Ausdrücken *älter als* und *(mindestens) so alt wie* berücksichtigt, die darin besteht, daß x genau dann älter als y ist, wenn y nicht mindestens so alt ist wie x. Diese Beziehung ist Teil unseres Verständnisses von Komparativkonstruktionen im allgemeinen und sollte in der logischen Formalisierung explizit gemacht werden. Hätten wir *älter als* und *mindestens so alt wie* zwei verschiedene Prädikate eingeführt, so wäre der Zusammenhang zwischen *älter als* und *mindestens so alt wie* bei der Formalisierung verlorengegangen und wir hätten die intuitive Bedeutung des Satzes nicht korrekt erfaßt.

(4) Ist Emil älter als Karl, dann ist Emil der älteste Student.
(4') $A(e, k) \rightarrow (\forall y)(((S(y) \ \& \ y \neq e) \rightarrow A(e,y))$

<u>Kommentar:</u> Auch (4) involviert eine logische Beziehung zwischen zwei Relationsausdrücken des Deutschen, dem Komparativ *älter als* und dem Superlativ *ältest*. "x ist der älteste Student" heißt: "x ist ein Student und x ist älter als alle anderen Studenten". Auch in diesem Fall wäre eine Formalisierung, die für *älter als* und *ältest* unabhängige Prädikate verwenden würde (ein zweistelliges Prädikat für *älter als* und ein einstelliges für *ältest*) unzureichend

(5) Nicht alle Studenten sind klüger als alle Professoren, doch manche Studenten sind klüger als manche Professoren.

(5') $\neg(\forall x)(\forall y)((S(x) \ \& \ P(y)) \rightarrow K(c,y)) \ \&$
$(\exists x)(\exists y)((S(x) \ \& \ P(y)) \ \& \ K(c,y))$

Kommentar: In (5') haben wir das Wort *doch* in (5) als Konjunktion (&) übersetzt. Das ist zwar nicht falsch, aber auch wieder nicht ganz richtig. Richtig ist es, insofern die Wahrheitsbedingungen eines Satzes von der Form *p aber q* in erster Näherung dieselben sind wie die von *p und q*: in beiden Fällen ist der Satz nur dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind. Dennoch sind die Bedeutungen von *und* und *doch* nicht identisch; *doch* (wie auch *aber* ) deutet auf einen Gegensatz zwischen p und q hin, während *und* eher ein Indiz dafür ist, daß kein Gegensatz zwischen den beiden Konjunkten besteht. Bei der Formalisierung natürlicher Sprache innerhalb der Prädikatenlogik war es meist üblich, rhetorische "Feinheiten" wie den Unterschied zwischen *doch* und *und* zu ignorieren. In der heutigen formalen Diskursanalyse und logisch fundierten Textverarbeitung spielen solche Unterschiede aber eine immer wichtigere Rolle.

(7) Karl mag Emil nicht.

(7') $\neg M(k,e)$

(8) Karl ist älter als Dieter aber nicht klüger.

(8') $A(k,d) \ \& \ \neg K(k,d)$

Kommentar: (8) gibt ein Beispiel von einem sehr häufig in der natürlichen Sprache auftretenden Phänomen, der sog. *Ellipse*. Das zweite Konjunkt von (5), "nicht klüger", erwähnt weder das intendierte Subjekt Karl noch das intendierte Komplement Dieter explizit; beide müssen aus dem Kontext "rekonstruiert" werden. Solche "Rekonstruktionen" sind Teil unseres normalen Sprachvermögens und meistens merken wir gar nicht, daß die von uns gesprochenen, geschriebenen, gehörten oder gelesenen Sätze elliptische Konstituenten enthalten. Bei der Formalisierung im Prädikatenkalkül sind wir gezwungen, die elliptischen Elemente im Satz explizit zu machen. Die Einzelheiten dieser Prozedur sind sehr kompliziert und bisher nur teilweise von der Linguistik korrekt beschrieben.

(9) Emil mag Karl und Dieter.

(9') $M(e,c) \ \& \ M(e,d)$

Kommentar: Die unmittelbar ersichtliche Struktur von (9) suggeriert, daß hier *mögen* als Relation zwischen dem Individuum Emil und dem Paar {Karl, Dieter} verwendet wird. Das Verb *mögen* ist aber, im Gegensatz zu bestimmten anderen sog. "kollektiven" Verben, *distributiv*: daß die Beziehung zwischen Emil und der Zweiermenge {Karl, Dieter} besteht, bedeutet nichts anderes, als daß Emil in der Beziehung zu jedem der Elemente dieser Menge steht. Da es hier um eine Menge mit nur zwei Elementen geht, können wir diese Information wie in (9') als Konjunktion darstellen.

(10) Jeder Student mag einen Professor.
(10') $(\forall x)(S(x) \rightarrow (\exists y)(P(y)) \ \& \ M(x,y)))$

(11) Es gibt einen Professor, den jeder Student mag.
(11') $(\exists y)(P(y)) \ \& \ (\forall x)(S(x) \rightarrow M(x,y)))$

(12) Kein Student mag mehr als zwei Profesoren und mindestens ein Student mag überhaupt keinen Professor.
(12') $\neg(\exists y)(S(y) \ \& \ (\exists u)(\exists v)(\exists w)( u \neq v \ \& \ u \neq w \ \& \ v \neq w \ \& \ P(u) \ \& \ P(v) \ \& \ P(w) \ \& \ M(y,u) \ \& \ M(y,v) \ \& \ M(y,w))) \quad \&$
$(\exists y)(S(y)) \ \& \ (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg M(y,x)))$

(13) Karl mag nur ältere Studenten.
(13') entweder: (i) $(\forall x)((M(k,x)) \rightarrow (S(x) \ \& \ A(x,k))$
oder: (ii) $(\forall x)((S(x) \ \& \ M(k,x)) \rightarrow A(x,k))$

Kommentar: Der Satz (13) ist mehrfach ambig. Erstens ist zwischen zwei Lesarten zu unterscheiden, die unterschiedlichen Betonungsmustern entsprechen: Wird nur das Adjektiv *ältere* betont, so bedeutet (13), daß es unter den Studenten, die Karl mag, nur ältere gibt, d.h. daß wenn x ein Student ist, den Karl mag, dann x ein älterer Student ist. Wird dagegen *Studenten* nicht weniger stark betont als *ältere*, so bekommen wir die Lesart, nach der es unter den von Karl gemochten Personen nur ältere Studenten gibt.

Darüberhinaus ist in (13) auch der Komparativ *älter* ambig. Weil der Bezugspunkt des Komparativs nicht explizit im Satz angegeben ist, muß dieser irgendwie aus dem Kontext erschlossen werden. Da wir (13) ohne weiteren Kontext präsentiert haben, liegt nahe, diesen Bezugspunkt mit dem einzigen im Satz erwähnten Individuum, also mit Karl zu identifizieren. (Diese Interpretation, wurde sowohl (13.i) als auch in (13.ii) angenommen.) Wäre dagegen (13) Teil eines Textes, in dem vorher schon von anderen Individuen die Rede ist, so hätte man den Komparativ *älter* eventuell auch auf eines von diesen Individuen beziehen können. (Geht z.B. der Satz "Der Fridolin interessiert Karl nicht." unmittelbar dem Satz (13) voran, wie in:

(13'') Der Fridolin interessiert Karl nicht. Karl mag nur ältere Studenten.

so liegt eine Interpretation nahe, nach der *ältere Studenten* gleichlautend mit *ältere Studenten als Fridolin*. ist.

Wie aus diesen Formalisierungsbeispielen hervorgeht, sind die Probleme, die bei der prädikatenlogischen Formalisierung natürlichsprachlicher Sätze zu lösen sind, keineswegs trivial. Es sei aber nochmals betont, daß diese Probleme nicht so sehr mit den Eigenschaften des prädikatenlogischen Formalismus als solchem, sondern mehr mit den Unterschieden zwischen Prädikatenlogik und Natürlicher Sprache zu tun haben. Oft machen wir uns nur wenig Gedanken darüber, was genau der "logische" Gehalt der von uns verwendeten Sätze ist. Prädikatenlogische Formalisierungen zwingen uns, uns über die logischen Inhalte Rechenschaft zu geben. Aus diesem Grund können solche Übersetzungsversuche als "logisch-semantische Diagnose" nützlich sein.

Prädikate mit drei oder mehr Argumentstellen sind z.B. für die Formalisierung von Sätzen erforderlich, in denen "ditransitive" Verben wie *schenken* oder die Präposition *zwischen* vorkommen, aber auch in anderen Fällen, wie in (11):

(14) Jeder, der in einen Orden eintritt, schenkt ihm alles, was er besitzt.
(15) Zwischen zwei Wolkenkratzern war eine kleine Kirche, zwischen zwei anderen war gar nichts.
(16) Von Paris nach Toulouse ist genau so weit wie von Berlin nach Warschau.

Repräsentieren wir die einfach transitiven Verben *eintreten* und *besitzen* mit Hilfe der 2-stelligen Prädikate E und B, das ditransitive Verb *schenken* mit dem 3-stellige Prädikat S und das Nomen *Orden* mit dem einstelligen Prädikat O - also B(x,y): "x besitzt y"; E(x,y): "x tritt in y ein"; S(x,y,z): "x schenkt y z"; O(x): "x ist ein Orden" - so läßt sich (9) wie folgt formalisieren:

(14') $(\forall x)(\forall y)((O(y)\ \&\ E(x, y)) \rightarrow (\forall z)(B(x,z) \rightarrow S(x,y,z)))$

Ebenso kann (15) wie in (15') formalisiert werden (den Übersetzungsschlüssel kann sich der Leser selbst entschlüsseln)

(15') $(\exists x)(\exists y)((W(x)\ \&\ W(y)\ \&\ (\exists z)(Ki(z)\ \&\ Kl(z)\ \&\ Z(z,x,y))\ \&$
$(\exists u)(\exists v)(W(u)\ \&\ W(v)\ \&\ u \neq x\ \&\ u \neq y\ \&\ v \neq x\ \&\ v \neq y\ \&$
$\neg(\exists z)\ Z(z,x,y)))$

(16) drückt eine vierstellige Beziehung zwischen den Städten Paris, Toulouse, Berlin und Warschau aus. Es bleibt hier wenig anderes übrig. als diesen Tatbestand anzuerkennen und den Satz mit Hilfe eines 4-stelligen Prädikats zu repräsentieren. Unter Verwendung von W(x,y,z,u) für "es ist genau so weit von x nach y wie von z nach u" und mit Individuenkonstanten für die erwähnten Städte ergibt sich:

(16') W(p,t,b,w)

(Man könnte dies durch W dargestellte vierstellige Beziehung zu einer drei-stelligen reduzieren, indem man Entfernungen als Objekte einführt und die Beziehung "x ist die Entfernung von y nach z" verwendet. (16) ließe sich dann als die Behauptung analysieren, daß es ein und nur ein Objekt gibt, das sowohl die Entfernung von Paris nach Toulouse als auch die Entfernung von Berlin nach Warschau ist. Eine solche Analyse würde aber über das, was in der sprachlichen Fom direkt enthalten ist, hinausgehen.)

###

Formal ist die Erweiterung des Prädikatenkalküls um mehrstellige Prädikate unproblematisch: Die neuen Prädikate werden dem Vokabular hinzugefügt, die Menge der atomaren Formeln wird entsprechend erweitert und die Modelltheorie wird dahingehend geändert, daß die Interpretationsfunktionen $I_M$ der Modelle den n-stelligen Prädikaten n-stellige Relationen auf $U_M$ als Bedeutungen zuordnen. Denn wie schon angedeutetet interessiert bei den mehrstelligen wie bei den einstelligen Prädikaten nur, welche Objekte des Universums $U_M$ das Prädikat erfüllen. Bei den einstelligen Prädikaten ist, wie wir gesehen haben, diese Information durch die Menge der das Prädikat erfüllenden Elemente aus $U_M$ bestimmt. Für die mehrstellige Prädikate gilt ähnliches. Ist P ein n-stelliges Prädikat (n $\geq$

2), dann ist für die Modelltheorie nur relevant, welche n-Tupeln $<a_1, \ldots, a_n>$ aus $U_M$ die Eigenschaft haben, daß P von ihren Elementen $a_1, \ldots, a_n$ erfüllt ist. Diese Information ist vollständig in der n-stelligen Relation auf $U_M$ enthalten, die genau diese Tupeln als ihre Elemente hat. Aus diesen Erwägungen geht auch hervor, daß die Wahrheitsdefinition für den Monadischen Prädikatenkakül (Def. 4 auf S. 64) mit der folgenden Klausel für atomare Formeln $P(t_1,\ldots,t_n)$ - mit n-stelligem Prädikat P - zu erweitern ist:

$$[P(t_1,\ldots,t_n)]_{M,\mathbf{a}} = 1 \text{ gdw } <[t_1]_{M,\mathbf{a}},\ldots, [t_n]_{M,\mathbf{a}}> \varepsilon\, I_M(P).$$

###

Damit haben wir den Punkt erreicht, an dem es möglich ist, die Syntax und Semantik des Prädikatenkalküls explizit zu definieren. Die folgenden Definitionen sind weitgehend Wiederholungen der früheren Definitionen für den Monadischen Prädikatenkalkül, bzw. für den Monadischen Prädikatenkalkül mit Identität.

Def. 28 A. (Syntax des Prädikatenkalküls mit mehrstelligen Prädikaten und Identität.)

Symbole:
1. Aussagenkonstanten: $p_1, p_2, p_3, \ldots$
2. Junktoren: $\neg$, &, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
3. Klammern: (,).
4. n-stellige Prädikatsymbole: $P^n_i$, für alle n, i $\geq 1$
5. Variablen: $v_1, v_2, v_3, \ldots$
6. Individuenkonstanten: $c_1, c_2, c_3, \ldots$
7. Quantoren: $\forall, \exists$.
8. Identität: =

Terme:
1. Jede Variable ist ein *Term*
2. Jede Individuenkonstante ist ein *Term*.

Formeln:
1. Jede Aussagenkonstante ist eine *Formel*.
2. Sei n $\geq 1$. Wenn $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist $P^n_i(t_1, \ldots, t_n)$ eine *Formel*.
3. Wenn $t_1$ und $t_2$ Terme sind, dann ist $t_1 = t_2$ eine *Formel*.
4. Wenn A, B Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, (A & B), (A v B), $(A \rightarrow B)$, und $(A \leftrightarrow B)$ *Formeln*.

5. Wenn A eine Formel ist und v eine Variable, dann sind auch $(\forall v)A$ und $(\exists v)A$ *Formeln*.

B (Semantik des Prädikatenkalküls mit mehrstelligen Prädikaten und Identität.)

1. Ein *Modell für* den Prädikatenkalkül ist ein Paar $M = <U_M, I_M>$, wobei

(i) $U_M$ (das *Universum von* M) eine nicht-leere Menge; und

(ii) $I_M$ eine Funktion, die den Individuenkonstanten und Prädikaten Bedeutungen zuordnet; und zwar:

$I_M(p_i)$ ist einer der Wahrheitwerte 0, 1;
$I_M(c_i)$ ist ein Element von $U_M$;
$I_M(c_i)$ ist eine Teilmenge von $U_M$; und
wenn $n > 1$, dann ist $I_M(P^n{}_i)$ eine Menge von n-Tupeln von Elementen aus $U_M$.

In den Definitionen unter 2 und 3 sei $M = <U_M, I_M>$ ein Modell und **a** eine Belegung in $U_M$. (Für den Begriff einer Belegung siehe Def. 2 auf S. ??.)

2. (Bedeutungen von Termen)

Wenn t die Variable $v_j$ ist, dann ist $[t]_{M,\mathbf{a}} = \mathbf{a}(v_i)$;
Wenn t die Konstante $c_j$ ist, dann ist $[t]_{M,\mathbf{a}} = M(c_i)$.

3. (Wahrheitsdefinition)

Der *Wahrheitwert von* einer Formel A *in* M *bezüglich* **a**, $[A]_{M,\mathbf{a}}$, ist wie folgt definiert:

(i) a. $[p_j]_{M,\mathbf{a}} = I_M(p_i)$

b. wenn t ein Term, dann ist
$[P^1{}_j(t)]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[t]_{M,\mathbf{a}} \varepsilon I_M(P^1{}_j)$

c. wenn $n > 1$ und $t_1, ..., t_n$ Terme sind, dann ist

$[P^n_i(t_1, ..., t_n)]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $<[t_1]_{M,\mathbf{a}}, .., [t_n]_{M,\mathbf{a}}> \varepsilon\ I_M(P^n_j)$

d. wenn $t_1, t_2$ Terme sind, dann ist $[t_1 = t_2]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[t_1]_{M,\mathbf{a}}$ gleich $[t_2]_{M,\mathbf{a}}$.

(ii) a. $[\neg A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$

b. $[A \,\&\, B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$

c. $[A \vee B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ oder $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$

d. $[A \rightarrow B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$ oder $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$

e. $[A \leftrightarrow B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw ($[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$) oder ($[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 0$)

(iii) a. $[(\forall v_j)A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw für jedes Objekt u in $U_M$ gilt: $[A]_{M,\mathbf{a}[u/v_i]} = 1$

b. $[(\exists v_j)A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw es en Objekt u in $U_M$ gibt, so daß gilt: $[A]_{M,\mathbf{a}[u/v_i]} = 1$

## Sprachen und Theorien des Prädikatenkalküls.

Wie wir schon gesehen haben, läßt sich der Prädikatenkalkül für die Formalisierung bestimmter Gegenstandsbereiche verwenden. Ein Beispiel ist die Mengenlehre. Die Grundannahmen der Mengenlehre lassen sich als Sätze des Prädikatenkalküls formulieren, wie z.B. das Extensionalitätsaxiom (S. 48)

$$(\forall y)(\forall z)\ ((M(y)\ \&\ M(z) \rightarrow (y = z \leftrightarrow (\forall x)(x\ \varepsilon\ y \leftrightarrow x\ \varepsilon\ z))),$$

das Potenzmengenaxiom (S. 69)

$$(\forall x)(\exists z)(\forall u)(u\ \varepsilon\ z \leftrightarrow (\forall v)(v\ \varepsilon\ u \rightarrow v\ \varepsilon\ x)),$$

usf. Die Totalität der als mengentheoretische Axiome angenommenen prädikatenlogischen Sätze kann dann als *Theorie* der Mengenlehre betrachtet werden. Sie legt genau fest, was als ein *mengentheoretisches*

*Theorem* zu betrachten ist: Die Theoreme sind all die Sätze, die aus der gegebenen Axiomenmenge logisch folgen.

Für die Formulierung einer solchen Theorie ist im allgemeinen nur eine begrenzte Anzahl von Prädikaten erforderlich. Die bekannteste Theorie der Mengenlehre, die sogenannte Theorie von *Zermelo-Fraenkel*, benötigt sogar nur ein Prädikat, das zweistellige Prädikat ε, "ist Element von".[17] In Bezug auf solche Theorien sind meistens nur die prädikatenlogische Formeln von Interesse, die mit dem Teil des prädikatenlogischen Vokabulars gebildet werden können, wovon auch die Theorie selbst Gebrauch macht. Aus diesem Grund liegt es nahe, sich von vornherein auf diese Teilmenge aller prädikatenlogischen Formeln festzulegen. Solche Teilmengen von Formeln, die sich aus einer Einschränkung des Vokabulars ergeben, nennen wir *Sprachen* des Prädikatenkalküls.

Nicht jede Einschränkung des Vokabulars des Prädikatenkalküls führt zu einer sinnvollen prädikatenlogischen Sprache. Insbesondere werden wir hier nur solche Sprachen betrachten, die sich aus Einschränkungen des *nicht-logischen Vokabulars* des Prädikatenkalküls ergeben. Unter dem *nicht-logischen Vokabular der Prädikatenlogik* verstehen wir die Menge der Prädikate (ausgenommen die Identität =), der Aussagenkonstanten und der Individuenkonstanten.

Da die Sprachen, die wir betrachten, immer aus *allen* (Termen und) Formeln bestehen, die den vorgegebenen Teilmengen des Vokabulars angehören, sind sie eindeutig durch diese Teilmengen bestimmt. Wir können daher die Sprachen mit den Teilmengen nicht-logischer Symbole, die sie bestimmen, identifizieren. (Z.B. läßt sich die oben erwähnte Sprache der Mengenlehre mit der Einermenge {ε} identifizieren; und so werden wir sie auch bezeichnen.) Damit kommen wir zu der folgenden Definition des Begriffs einer *Sprache der Prädikatenlogik* sowie ihrer *Terme* und *Formeln*

---

[17] 1. In unserer informalen Diskussion sind wir davon ausgegangen, daß es neben Mengen auch Objekte gibt, die keine Mengen sind. In dem Fall empfiehlt es sich, neben der zweistelligen Relation ε von dem zusätzlichen einstelligen Prädikat M ("ist eine Menge") Gebrauch zu machen, also mit der Sprache {ε,M}, zu arbeiten. Die in der mathematischen Logik meist verwendeten Theorien gehen davon aus, daß die von ihnen beschriebenen Srukturen ausschließlich aus Mengen bestehen. In dem Fall kann man sich auf ε beschränken.

2. Üblicherweise werden in Theorien der Mengenlehre, wie auch in anderen Theorien, mit Hilfe von Definitionen neue Symbole eingeführt, zum Beispiel ist das zweistellige Prädikat ⊆ der Mengeninklusion. Durch solche Definitionen wird das Ausgangsvokabular erweitert,

<u>Def. 29.</u> 1. Eine *Sprache des Prädikatenkalküls* ist eine Menge von nicht-logischen Symbolen des PK.

2. Die *Terme und Formeln* einer Sprache L sind diejenigen Terme und Formeln des PK, in denen keine nicht-logischen Konstanten vorkommen, die nicht zu L gehören.

Sei L eine Sprache im Sinn von Def. 29. Die Modelle der Prädikatenlogik, wie sie in Def. 28 definiert sind, können natürlich auch als Modelle für L betrachtet werden. Denn sie enthalten alle Informationen, die für die Bestimmung der Wahrheitswerte von den Sätzen in L nötig sind. Solche Modelle enthalten aber im allgemeinen auch viel überflüssige, aus der Sicht von L bedeutungslose Information, insofern sie auch für die nicht-logischen Symbole, die *nicht* zu L gehören, Interpretationen bereitstellen. Weil diese Informationen aus der Sicht von L irrelevant sind, empfielt es sich, von vornherein auf sie zu verzichten, und als Modelle für L solche Strukturen zu betrachten, die nur den zu L gehörigen Symbolen Interpretationen zuweisen. Damit kommen wir zur nächsten Definition:

<u>Def. 30</u> Ein *Modell für* eine Sprache L ist ein Paar $M = \langle U_M, I_M \rangle$, in dem (i) $U_M$ eine nicht-leere Menge ist; und
(ii) $I_M$ eine Interpretationsfunktion im Sinne von Def. 38 ist, die aber nur für die nicht-logischen Symbole in L definiert ist.

Zuletzt der Begriff einer *Theorie* einer prädikatenlogischen Sprache L. Wie schon gesagt, läßt sich eine Theorie von L als eine Menge von Sätzen aus L charakterisieren. Eine solche Theorie (also: Satzmenge) von L bestimmt die Gesamtheit der Behauptungen, die als gültige Aussagen über die von der Theorie beschriebenen Gegenstandsbereich zu betrachten sind. Diese sind die in L ausdrückbaren Behauptungen, die aus T folgen - mit anderen Worten, diejenigen Sätze B von L, für die gilt:

$T \models B$ ("B ist wahr in jedem Modell für L, indem alle Sätze von T wahr sind.")

<u>Def. 31.</u> Sei L eine Sprache.

1. Eine *Theorie in* L ist eine Menge T von Sätzen von L.
2. Ein Satz B von L ist *gültig in* der Theorie T, wenn $T \models B$

Neben diesem allgemeinen Theoriebegriff wird in der Logik oft von einem eingeschränkteren Begriff Gebrauch gemacht, dem einer *deduktiv abgeschlossenen* Theorie. Eine deduktiv abgeschlossene Theorie von L ist eine Satzmenge von L, die alle aus ihr folgenden Sätze von L schon enthält:

Def. 32. Sei L eine Sprache.

1. Eine *deduktiv abgeschlossene Theorie in* L ist eine Menge T von Sätzen von L, für die gilt:

Wenn B ein Satz von L ist und $T \models B$, dann $B \varepsilon T$.

(Oft werden deduktiv abgeschlossene Theorien einfach als "Theorien" bezeichnet.)

(N.B. der Begriff einer deduktiv abgeschlossenen Theorie ist gewissermaßen abstrakt. Deduktiv abgeschlossene Theorien sind immer unendliche Mengen, denn sie enthalten auf jeden Fall alle logisch gültigen Sätze von L und davon gibt es schon unendlich viele. Explizit auflisten lassen sich solche Theorien also nie. Wenn von bestimmten deduktiv abgeschlossenen Theorien die Rede ist, ist man in der Praxis deswegen doch wieder gezwungen, bestimmte Sätze aus der Theorie hervorzuheben, von denen alle anderen Sätze der Theorie logische Folgen sind. Eine solche Teilmenge der Theorie T, aus der alle anderen Sätze von T folgen, wird eine *Axiomatisierung von* T genannt: Ax ist eine Axiomatisierung von T, wenn gilt: $T = \{A: A$ ist ein Satz von L & $Ax \models A\}$.)

##

Theorien der Mengenlehre sind besonders kompliziert und in diesem Kurs werden wir, wie schon angekündigt, keine formale Mengentheorie explizit vorführen. Es gibt aber auch bescheidenere Formalisierungsanwendungen der Prädikatenlogik und im wesentlichen haben wir einige von diesen auch schon kennengelernt. Zum Beispiel kann man unsere Charakterisierungen von relationalen Strukturen wie Ordnungen und Äquivalenzrelationen als "kleine" prädikatenlogische Theorien betrachten. Z.B. entspricht dem Begriff einer schwachen linearen Ordnung die folgende Theorie der Sprache $\{\leq\}$ (der Sprache also, die als einziges nicht-logisches Symbol das zweistellige Prädikat $\leq$ enthält:

Def. 33 (prädikatenlogische Theorie einer schwachen linearen Ordnung.(= weak linear odering, WLO))

$A_{WLO}1.$ $(\forall x)\ x \leq x$

$A_{WLO}2.$ $(\forall x)(\forall y)\ ((x \leq y\ \&\ y \leq x) \rightarrow x = y)$

$A_{WLO}3.$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ ((x \leq y\ \&\ y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

$A_{WLO}4.$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x \leq y \vee y \leq x)$

Übung. Es sind nach dem Muster von Def. 33 Theorien für die folgenden Relationstypen zu formulieren: (i) Starke lineare Ordungen; (ii) starke partielle Ordnungen; (iii) Äquivalenzbeziehungen.

## Weiteres über Ordnungen und Äquivalenzbeziehungen.

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzbeziehung auf der Menge U. Wie wir schon gesehen haben (S. 77-79), bestimmt eine solche Beziehung eine Unterteilung von U in Teilmengen. Diese Teilmengen sind die von den Elementen u von U generierten Äquivalenzklassen $[u]_\equiv$ bzgl. $\equiv$. Diese Teilmengen decken U ganz ab - in dem Sinne, daß jedes Element u von U einer solchen Äquivalenzklasse angehört - dies folgt direkt aus der Tatsache, daß immer gilt: $u \in [u]_\equiv$. Überdies gilt für je zwei Äquivalenzklassen $[u]_\equiv$ und $[v]_\equiv$, daß entweder $[u]_\equiv = [v]_\equiv$ (in diesem Fall gilt $u \equiv v$) oder sonst $[u]_\equiv \parallel [v]_\equiv$ (in diesem Fall gilt $\neg(u \equiv v)$). Wir wollen dieses Ergebnis jetzt noch etwas ausbauen. Dazu führen wir zuerst den Begriff einer *Partition* ein. Eine *Partition* einer Menge U ist eine Menge von Teilmengen von U mit den Eigenschaften, die wir gerade an der Menge der Äquivalenzklassen beobachtet haben:

Def. 34 Sei U eine Menge. Eine *Partition von* U ist eine Teilmenge P von $P$(U) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Jedes Element $Y \in P$ ist nicht-leer, $(\forall Y)(Y \in P \rightarrow Y \neq \varnothing)$]

(ii) Wenn Y, Z beliebige Elemente von P, dann gilt entweder $Y = Z$ oder $Y \parallel Z$, $(\forall Y)(\forall Z)((Y \in P\ \&\ Z \in P) \rightarrow (Y = Z \vee Y \parallel Z))$]

(iii) Jedes Element von U gehört zu einem Element von P, $(\forall u)(u \in U \rightarrow (\exists Y)(Y \in P\ \&\ u \in Y))$

Wie schon beobachtet, ist, wenn $\equiv$ eine Äquivalenzbeziehung auf der Menge U ist, die Menge $\{[u]_\equiv : u \varepsilon U\}$ eine Partition von U. Wir bezeichnen diese Partition als $P(\equiv)$. Umgekehrt läßt sich aus einer Partition P von U eine Äquivalenzbeziehung $\equiv(P)$ auf U ableiten, die zwischen Elementen u und v von U besteht, wenn sie zu einundderselben "Zelle" der Partition gehören: Es gelte für beliebiges u, v ε U:

(**) $u \equiv(P)\, v$ gdw. $(\exists Y)(Y \varepsilon P \;\&\; u \varepsilon Y \;\&\; v \varepsilon Y)$.

Daß die so definierte Relation in der Tat eine Äquivalenzbeziehung auf U ist, besagt der erste Teil des folgenden Theorems 63. Der zweite Teil des Theorems fügt dem hinzu, daß wenn man aus der Äquivalenzrelation $\equiv(P)$ nach dem weiter oben beschriebenen Verfahren wieder eine Partition $P(\equiv(P))$ bildet, diese mit der Ausgangspartition P identisch sein wird. (Und genauso wird man, ausgehend von einer Äquivalenzbeziehung $\equiv$, mit $\equiv(P(\equiv))$ wieder die ursprüngliche Beziehung $\equiv$ erhalten.)

Thm. 63 Sei P eine Partition von U und sei $\equiv(P)$ die durch (**) definierte Relation auf U. Dann gilt

(i) $\equiv(P_o)$ ist eine Äquivalenzbeziehung auf U.

(ii) Die mittels (*) aus $\equiv(P_o)$ gebildete Partition von U $P(\equiv(P_o))$ ist identisch mit $P_o$.

Beweis: Übung

Theorem 63 gibt der Beobachtung formalen Ausdruck, daß sowohl Äquivalenzbeziehungen als auch Partitionen beide als formale Explizierung des Prinzips einer Klassifikation von Objekten nach gemeinsamen Kriterien betrachtet werden können. Insofern es einen Unterschied zwischen den beiden Begriffen gibt, so besteht er lediglich darin, daß Äquivalenzbeziehungen die Ähnlichkeit der Objekte, die einundderselben Klasse zugeordnet werden, hervorheben, während Partitionen dagegen den Akzent auf die entsprechenden Klassen - das sind die in ihr enthaltenen Elemente - selbst legen.

## Ordnung und Äquivalenz: Pseudo-Ordnungen

In unserer Diskussion der verschiedenen Typen von Ordnungsrelationen wiesen wir kurz darauf hin, daß die Beziehungen, die in der natürlichen Sprache durch Komparative ausgedrückt werden (wie: *länger als*, *schwerer als*, usw.), im allgemeinen keine lineare Ordnungen sind. Denn es kann verschiedene Individuen im Feld solcher Relationen geben, und oft wird das auch so sein, zwischen denen die Relation "...-er als" weder in der einen noch in der anderen Richtung besteht. Z.B können zwei Objekte gleich schwer oder gleich lang sein. Dennoch sind solche Ordnungen - sie werden *Pseudo-Ordnungen* genannt - in einem gewissen Sinne nicht weit von der Linearität entfernt, in welchem Sinne, das werden wir in diesem Abschnitt untersuchen.

Kurz gefaßt wird unser Ergebnis auf folgendes hinauslaufen: Eine Pseudo-Ordnung ist eine lineare Ordnung von bestimmten Äquivalenzklassen. Im Fall von "schwerer als" bestehen diese Klassen aus Objekten, die gleich schwer sind, im Fall von "länger als" aus Objekten der gleichen Länge. usw. Die Äquivalenzrelation, die diese Klassen erzeugt, läßt sich für beliebige Ordnungen definieren, wird aber im allgemeinen keine Äquivalenzbeziehung sein:

Def. 35. Sei $<$ eine starke partielle Ordnung auf der Menge U. Unter $R_<$ verstehen wir die wie folgt definierte Relation auf U:

(*) Für alle u, v $\varepsilon$ U gilt: $u \; R_< \; v$ gdw. $\neg (u < v) \; \& \; \neg (v < u)$

Ist $<$ eine linare Ordnung von U, so ist $R_<$ die Identität auf U. Ist $<$ eine beliebige partielle Ordnung, so ist, wie sich leicht verifizieren läßt, $R_<$ reflexiv und symmetrisch auf U, aber darüberhinaus läßt sich über die Relation nicht viel sagen. Insbesondere braucht sie keine Äquivalenzbeziehung zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei U die Menge {a,b,c,d} und $<$ die Relation {<a,b>, <a,c>, <a,d>, <b,c>} auf U. Dann ist $<$ eine starke partielle Ordnung auf U, aber die mit (*) definierte Relation $R_<$ ist nicht transitiv und somit auch keine Äquivalenzbeziehung. Die Transitivität ist verletzt, denn es gilt $b \; R_< \; d$ und $d \; R_< \; c$ aber nicht $b \; R_< \; c$. Nicht-lineare Ordnungen $<$ mit der Eigenschaft, daß $R_<$ transitiv (und damit eine Äquivalenzbeziehung) is, bilden also innerhalb der partiellen Ordnungen eine besondere Klasse. Solche Ordnungen werden *Pseudo-Ordnungen* genannt.

Def. 36. Sei $<$ eine starke partielle Ordnung auf U und sei $R_<$ definiert wie in (*) von Def. 35. $<$ ist eine *Pseudo-Ordnung* gdw. $R_<$ eine Äquivalenzbeziehung ist.

Pseudo-Ordnungen lassen sich informell so charakterisieren: Sie sind partielle Ordnungen, die nur deswegen keine vollständige Ordnungen sind, weil sie manchmal ein "Unentschieden" zulassen. Wenn es aber zwischen zwei Elementen a und b ein solches Unentschieden gibt, dann werden diese Elemente sich im Sinne der Ordnung allen anderen Elementen gegenüber ähnlich verhalten: wenn a vor c in der pseudo-Ordnung kommt, dann kommt auch b vor c; kommt c vor a, so kommt auch c vor b; und ist der Vergleich zwischen a und c unentschieden, dann ist es auch der Vergleich zwischen b und c. Die formale Rechtfertigung dieser informellen Charakterisierung ist, daß die Elemente einer und derselben Äquivalenzklasse der Relation $R_<$ sich in der Tat so verhalten wie gerade beschrieben: Gehören a und b derselben Äquivalenzklasse an und kommt a vor irgend einem Objekt, so kommt auch b vor c, usw.

Diese Beobachtung impliziert, daß man, wie in dem ersten Absatz dieses Abschnitts schon angedeutet wurde, aus der gegebenen Pseudo-Ordnung $<$ eine lineare Ordnung von den durch $R_<$ erzeugten Äquivalenzklassen bilden kann. Die im folgenden Theorem beschriebene Konstruktion macht dies explizit.

Thm. 64 Sei $<$ eine Pseudo-Ordnung auf U und sei $R_<$ definiert wie in (2). Sei $P_<$ die durch $R_<$ erzeugte Partition von U und sei $</R_<$ die wie folgt definierte Relation auf U:

$$\text{für } Y, Z \varepsilon V \text{ gilt: } Y </R_< Z \text{ gdw. } (\exists u)(\exists v)(u \varepsilon Y \;\&\; v \varepsilon Z \;\&\; uRv)$$

Dann ist $</R_<$ eine starke lineare Ordnung von $P_<$.

Beweis: Übung.

Wie oben diskutiert, ergeben sich Pseudo-Ordnungen insbesondere aus Meßverfahren, die allen Objekten aus der Menge U linear angeordnete Meßwerte (üblicherweise Zahlen) zuordnen, die aber möglicherweise für zwei verschiedene Objekte dasselbe Meßergebnis produzieren können. Wenn wir den Begriff eines "Meßverfahrens abstrakt genug auffassen, so kann man diese Beschreibung als allgemeine Charaktrisierung von Pseudo-Ordnungen auffassen: Eine Pseudo-

Ordnung kann immer verstanden werden als eine, die sich daraus ergibt, daß man die Objekte einer vorgegebenen Menge U auf Elemente irgendeiner linearen Ordnung abbildet. Denn, wie die oben beschriebene Konstruktion zeigt, ist mit einer beliebigen Pseudo-Ordnung $<$ auf U die Funktion $F_<$ assoziiert, die jedes u ε U auf seine $R_<$-Äquivalenzklasse abbildet. Diese Funktion können wir als ein "abstraktes Meßverfahren" betrachten, bei dem die nach Theorem 64 linear geordneten Äquivalenzklassen die Rolle von "Meßwerten" spielen.

###

## Zwei-stellige Relationen: Die graphentheoretische Perspektive.

Es gibt eine Perspektive auf zweistellige Relationen und ihre Eigenschaften, die sich von der von uns bisher verfolgten mengentheoretischen Perspektive zumindest oberflächlich unterscheidet. Aus dieser Perspektive ist eine zweistellige Relation R auf einer Menge U ein *Graph* - eine Struktur, die aus Punkten (oder Knoten) und diese Knoten verbindenden *Kanten* besteht. Dabei sind die Elemente von U die Punkte oder Knoten die Objekte und die Relation besteht zwischen Knoten a und b wenn es zwischen ihnen eine verbindende Kante gibt.

Ein attraktiver Aspekt der graphentheoretischen Perspektive ist die Möglichkeit, Graphen (wie der Name ja auch besagt) "graphisch" - d.h. aus Punkten einer Fläche und Verbingdungslinien zwischen ihnen - dartzustellen. Ein Beispiel ist (1).

(1)

In dem Graphen (1) besteht die Menge der Knoten aus a, b, c, d, e und f. Die Menge der Kanten kann man mit den Paaren von ihren Anfangs- und Endpunkten identifizieren, also mit den Paaren: <a,b>, <a,d>, <b,c>, <c,c>, <a,f>, <d,f>, <e,f>, <f,b>.)

Graphische Strukturen wie (1) deuten auf eine gewisse Ambivalenz in der Verwendung des Begriffs "Graph". Einerseits wird der Begriff als Bezeichnung von bestimmten aus Punkten und Verbindungslinien bestehenden geometrischen Strukturen verwendet. Andererseits betrachtet man Graphen auch abstrakt als Strukturen, die aus Knoten und Kanten bestehen, wobei die Knoten einfach die Elemente einer gegebenen Domäne U sind und die Kanten Paare dieser Elemente. Es ist diese, zweite, abstrakte Betrachtung von Graphen, nach der sie nichts weiter als zweistellige Relationen sind, um die es hier geht.

Wesentlich für die Identifikation von Graphen und beliebigen zweistelligen Relationen ist es, daß die Kanten der Graphen *gerichtet* sind: Eine Kante ist nicht einfach eine Verbindung zweier Knoten, sie hat einen Anfang und ein Ende - d.h. einer der beiden Knoten ist der Anfang und der andere das Ende der Kante. Mit anderen Worten, insofern Kanten Paare von Knoten sind, sind es geordnete, nicht ungeordnete Paare. Graphen in diesem Sinne - also: Strukturen, die aus einer Knotenmenge und einer Menge von geordneten Knotenpaaren bestehen - werden in der Graphentheorie *gerichtete Graphen* genannt. Daneben spricht man auch von *nicht-gerichteten Graphen*. Diese sind Strukturen, die aus einer Knotenmenge usammen mit einer Menge von *ungeordneten* Knotenpaaren bestehen. Graphisch läßt sich der Unterschied zwischen diesen beiden Typen von Graphen so darstellen, daß man bei gerichteten Graphen die Richtung der Kanten vermerkt - etwa, indem man sie wie in (1) mit einem Pfeil versieht, während die Kanten nicht-gerichteter Graphen kein solches Merkmal tragen. Entfernen wir z.B. die Pfeile aus (1), so bekommen wir die graphische Darstellung eines ungerichteten Graphen:

(2)

In abstrakter Form ist der in (2) dargestellte Graph die Struktur, die aus der Knotenmenge {a, b, c, d, e, f} und der Kantenmenge {{a,b}, {a,d}, {b,c}, {c,c}, {a,f}, {d,f}, {e,f}, {f,b}} (wobei, es sei noch mal betont, die Kanten jetzt ungeordnete Paare sind).

Welchen Relationen entsprechen ungerichtete Graphen? Das hängt davon ab, wie wir die ungerichteten Kanten interpretieren. es gibt hier im Prinzip zwei Möglickeiten: Entweder betrachten wir eine ungerichtete Kante, etwa {a,b}, als Angabe, daß die Relation in beiden Richtungen - also sowohl zwischen a und b als auch zwischen b ud a - besteht oder wir betrachten die in dem Paar {a,b} enthaltene Information als "unterspezifiziert", d.h. als Indiz, daß die Relation in mindestens einer Richtung besteht, aber ohne Ausschluß darüber zu geben, ob sie in der einen Richtung, in der anderen oder sogar in beiden Richtungen gilt. In der Praxis der Graphentheorie ist es oft nicht leicht, zwischen diesen beiden Interpretationen zu unterscheiden. Das kommt daher, daß von ungerichteten Graphen meist nur unter der Voraussetzung die Rede ist, daß es sich von vornherein nur um eine symmetrische Relation handeln kann. Und wenn wir uns auf symmetrische Relationen beschränken, fallen die beiden Interpetationen offensichtlich zusammen. Dennoch kann man sagen, daß die in der Graphentheorie normalerweise intendierte Interpretation die zuerst erwähnte ist, nach der {a,b} bedeutet, daß die Relation in beiden Richtungen gilt.

Damit bekommen wir eine allgemeine Korrespondenz zwischen ungerichteten Graphen und symmetrischen Relationen. Der symmetrischen Relation R auf der Menge U entspricht der ungerichtete Graph <U, R'>, wobei R' die Menge aller Paare {a,b} ist, für die a, b e U und die Paare <a,b> und <b,a> sind Elemente von R

Was wir bisher über gerichtete Graphen gesagt haben, enthielt eine starke Suggestion, daß analog eine allgemeine Korrespondenz zwischen gerichteten Graphen und beliebigen zweistelligen Relationen bestehen sollte. Das bedeutet aber, daß wir insbesondere auch symmetrische Relationen als gerichtete Graphen darstellen können. Sei R eine solche Relation und seien a und b Elemente, zwischen denen sie gilt - also <a,b> ε R und <b,a> ε R. In einem entsprechenden gerichteten Graphen muß es dann eine Kante von a nach b und auch eine von b nach a geben. Dies bedeutet also, daß die Richtungsmerkmale, die die Knotenverbindungen in gerichteten Graphen ergänzen, für ein gegebenes Knotenpaar gleichzeitig auftreten können müssen. Graphisch läßt sich dieses Problem entweder so lösen, daß man die Knoten durch zwei Kanten mit gegenläufigen Pfeilen verbindet oder indem man die eine Kante mit zwei Pfeilmerkmalen versieht. Die beiden Möglichkeiten sind in (3) und (4) dargestellt.

(3)

(4)

Wir schließen diese Diskussion mit der Definition der beiden absrakten Graphen

Def. 37 (i) Ein *gerichteter Graph mit Knotenmenge* U ist ein Paar von der Form $\langle U,G \rangle$, wobei U eine Menge und G eine Menge von geordneten Paaren von Elementen aus U. (Also ist G eine zweistellige Relation auf U.)

(ii) Ein *nicht-gerichteter Graph mit Knotenmenge* U ist ein Paar von der Form $\langle U,G \rangle$, wobei U eine Menge und G eine Menge von ungeordneten Paaren von Elementen aus U ist. (G kann als eine symmetrische zweistellige Relation auf U betrachtet werden, die aus allen geordneten Paaren $\langle a,b \rangle$ besteht mit $\{a,b\} \in G$.)

## Graphen: Pfade und Zyklen.

Ein zentrales Konzept der Graphentheorie ist der eines *Pfades*: Ein Pfad von a nach b in einem gerichteten Graph G ist ein n-Tupel von Knoten, das mit a beginnt und mit b endet, und in dem je zwei aufeinanderfolgende Komponenten durch eine Kante in G verbunden sind, die ihren Anfang in der ersten und ihr Ende in der zweiten Komponente nimmt:

Def. 38. Sei G ein Graph auf der Knotenmenge U und a, b Elemente von U. Ein *Pfad in* G *von* $u_1$ *nach* $u_2$ ist ein Tupel $\langle u_1, ..., u_n \rangle$, wobei n irgendeine Zahl $\geq 1$, $u_1 = a$, $u_n = b$ und für $i = 1, ..., n-1$ gilt: $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ ist eine Kante von G.

Diese Definition bedarf einer Erläuterung. Die Fälle mit n > 1 sind unproblematisch. Für n = 2 haben wir einen "einschrittigen" Pfad, bestehend aus einem Paar $<u_1, u_2>$ mit $u_1 = a$, $u_2 = b$, während $<u_1,u_2>$ eine Kante von G ist; also ist <a,b> selbst eine Kante. Wenn n > 2, so haben wir einen Pfad, der aus der Aufeinanderfolge von zwei oder mehr Kanten besteht. Möglicherweise problematisch ist nur der Fall, in dem n = 1. In diesem Fall ist die Bedingung von Def. 38 so zu lesen: Es gibt ein 1-Tupel $<u_1>$, so daß $u_1 = a$, $u_1 = b$ (denn in diesem Fall ist n = 1!); die Bedingung, daß es ein oder mehr Paare in G gibt, entfällt in diesem Fall, da das 1-Tupel nur eine Komponente hat. Nach dieser Auslegung gibt es also für jedes a ε U einen "uneigentlichen Pfad von a nach a: Wenn man schon in a ist , dann kann man auch nach a "kommen" - gewissermaßen umsonst, denn man ist ja schon da.

Sei ANC(G) die Beziehung, die zwischen zwei Knoten a und b besteht, wenn es einen Pfad in G von a nach b gibt. Aus der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes folgt, daß ANC(G) reflexiv auf der Knotenmenge U ist. Ebenso ist sie, wie sich leicht verifizieren läßt, transitiv auf U. Denn, wenn es einen Pfad von a nach b und einen von b nach c gibt, dann gibt es auch einen Pfad von a nach c, den man bekommt, indem man die Pfade von a nach b und von b nach c aneinanderknüpft. Auch ist leicht einzusehen, daß wenn G symmetrisch ist, dies ebenso der Fall für ANC(G) ist.

Für einen symmetrischen gerichteten Graphen <U, G> ist also ANC(G) eine Äquivalenzbeziehung auf U. Dasselbe gilt allgemein für ungerichtete Graphen. Auch für diese läßt sich der Pfadbegriff definieren - die Definition ist fast mit Def 38 identisch, nur entfällt die Bedingung, daß die $u_i$ und $u_{i+1}$ verbindende Kante bei $u_i$ anfängt und bei $u_{i+1}$ endet. Dieser Pfadbegriff gibt dann genau wie bei gerichteten Graphen Anlaß zu der Relation ANC(G).

Wir fassen diese Beobachtungen über ANC(G) im folgenden Theorem 65 zusammen. Ihm voran geht die formale Definition der Relation ANC(G)

<u>Def.39</u> Sei <U, G> ein Graph. ANC(G) ist die Relation auf U, die definiert ist durch die Bedingung: für a, b ε U gilt:

<a,b> ε ANC(G) gdw es einen Pfad in G von a nach b gibt.

<u>Thm 65.</u> 1. Sei <U, G> ein gerichteter Graph. Dann ist ANC(G) reflexiv und transitiv auf U.

2. Sei <U, G> ein nicht-gerichteter Graph. Dann ist ANC(G) eine Äquivalenzbeziehung auf U.

Ein weiterer wichtiger Begriff der Graphentheorie ist der eines *Zyklus*. Ein *Zyklus in* einem Graph G ist ein Pfad in G von Länge > 1, der bei seinem Ausgangspunkt zurückkehrt, also ein Pfad $<u_1, ..., u_n>$, mit n > 1, so daß $u_n = u_1$. Der Zyklusbegriff ist insbesondere bei bestimmten Anwendungen von Graphen in Analysen von Berechnungsvorgängen wichtig, die ein zentrales Thema der Informatik und insbesondere auch der Computerlinguistik bilden. In diesen Anwendungen entsprechen Zyklen oft Teilprozessen, die zu ihren Ausgangspunkt zurückführen und damit die Gefahr in sich bergen, daß der Rechenprozess, nachdem er bei einem schon früher erreichten Zustand wieder angelangt ist, von dort aus die gleichen Schritte aufs Neue durchlaufen wird, und so in einen "Loop" gerät. Wünschenswert sind deswegen *Azyklische* Rechnungsvorgänge, in denen keine Zyklen vorkommen. Unter anderem aus diesem Grund bilden die azyklischen Graphen eine bedeutende Teilklasse der Graphen insgesamt.

##

## Bäume.

Der nächste Begriff, den es einzuführen gilt, ist der eines *Baumes*. Für den Linguisten ist dieser der vielleicht vertrauteste von all den Relationstypen, die in diesem Kurs diskutiert werden. Isbesondere in der generativen Linguistik werden Bäume laufend verwendet, und zwar weil sich die Analyse eines grammatischen Ausdrucks einer natürlichen Sprache in seine syntakischen Konstituenten natürlich als Baum darstellen läßt. Dasselbe gilt übrigens ebenfalls für die wohlgeformten Ausdrücke formaler Sprachen, wie etwa für den Aussagenkälkül oder den Prädikatenkalkül. Beispielsweise kann man den Aufbau der aussagenlogischen Formel

(2) $((p_1 \rightarrow q_1) \,\&\, (p_2 \rightarrow q_2)) \rightarrow (p_3 \vee \neg q_3)$

wie in (3) graphisch darstellen

(3) $((p_1 \rightarrow q_1) \,\&\, (p_2 \rightarrow q_2)) \rightarrow (p_3 \vee \neg q_3)$

$(p_1 \rightarrow q_1)\ \&\ (p_2 \rightarrow q_2)$ $\qquad\qquad$ $p_3 \vee \neg q_3$

$p_1 \rightarrow q_1$ $\qquad$ $p_2 \rightarrow q_2$ $\qquad$ $p_3$ $\qquad$ $\neg q_3$

$p_1$ $\qquad$ $q_1$ $\qquad$ $p_2$ $\qquad$ $q_2$ $\qquad\qquad$ $q_3$

Der in (3) dargestellte Graph G hat als Knoten die Formeln $((p_1 \rightarrow q_1)\ \&\ (p_2 \rightarrow q_2)) \rightarrow (p_3 \vee \neg q_3)$, $(p_1 \rightarrow q_1)\ \&\ (p_2 \rightarrow q_2)$, $p_3 \vee \neg q_3$, ... , $q_3$, während die Verbindungsstriche zwischen diesen die Kanten von G repräsentieren.

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, bestimmt G wie jeder andere Graph eine reflexive und transitive Relation ANC(G), also eine schwache partielle Ordnung. Es ist in diesem Sinn, daß (3) einen Baum darstellt - der in (3) dargestellte Baum ist die Relation ANC(G).

Im allgemeinen werden Bäume als schwache bzw. starke partielle Ordnungen definiert. (Wir wählen hier die Charakterisierung als schwache Ordnung; aber da, wie wir gesehen haben (S. ??), schwache und starke Ordnungen ineinander überführbar sind, hat dise Wahl keine signifikante Konsequenzen.) Aber nicht jede partielle Ordnung ist ein Baum; es müssen noch zwei weitere Bedingungen erfüllt sein: (i) Es muß ein Element existieren, das allen anderen Elementen der Ordnung im Sinne der Ordnung vorangeht - dieses Element wird der *Wurzelknoten* des Baumes geannt. (ii) Vom Wurzelknoten gibt zu jedem anderen Element u der Ordnung einen und *nur* einen Pfad. (Also gibt von u immer einen aber auch nur einen Weg zurück zu der Wurzel.)

Def. 40 Ein *Baum mit Knotenmenge* U ist eine zweistellige Relation $\leq$ auf U, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(o) $\leq$ ist eine schwache partielle Ordnung auf U

(i) $(\exists w)(\forall x)(x \in U \rightarrow w \leq x)$

(ii) $(\forall x)\forall y)(\forall z)(x \leq y\ \&\ x \leq z \rightarrow y \leq z \vee z \leq y)$

Es läßt sich leicht verifizieren, (a) daß jeder Baum genau einen Wurzelknoten hat (was auch den Terminus "der Wurzelknoten des Baumes" rechtfertigt), und (b) für endliche Bäume gilt, daß es für jede zwei Knoten eines Baumes unter den Knoten, die unterhalb von beiden liegen, immer einen größten Knoten gibt. Schließlich bildet für jedes Element u eines Baumes, die Einschränkung der Baumrelation auf u zusammen mit den oberhalb von ihm liegenden Knoten wiederum einen Baum, der sogenannte *Unterbaum mit Wurzel* u. Das folgende Theorem faßt diese Beobachtungen zusammen:

Thm. 66 1. Jeder Baum hat genau einen Wurzelknoten.

2. In einem endlichen Baum $\leq$ gibt es für beliebige Knoten x und y einen "maximalen" Knoten unterhalb von von x und y.

Genauer.: Sei $\leq$ ein Baum auf einer endlichen Knotenmenge U und seien x und y Elemente von U. Dann gibt es einen Knoten z in U mit den folgenden Eigenschaften: (i) $z \leq x$ ; (ii) $z \leq y$ und

(iii) $(\forall u)(u \leq x \ \& \ u \leq y \rightarrow u \leq z)$

3. Sei u ein Element des Baumes $\leq$ und sei $\leq'$ die folgende Relation: $\leq' = \{ \langle a,b \rangle \varepsilon \leq : a \leq u \ \& \ b \leq u \}$. Dann ist $\leq'$ ein Baum mit Wurzelknoten u.

Beweis: Der Beweis von 1 und der von 3 werden dem Leser überlassen. Der Beweis von 2 geht wie folgt:

Seien x und y beliebige Elemente aus U. Da für den Wurzelknoten w gilt: $w \leq x$ und $w \leq y$, ist die Menge $V = \{u \ \varepsilon \ U: u \leq x \ \& \ u \leq y\}$ nicht leer. Da U endlich ist und V Teilmenge von U, ist auch V enflich. Auch gilt wegen Def. 40.2, daß $\leq$ V linear ordnet. (Denn wenn $u \ \varepsilon \ V$, $v \ \varepsilon \ V$, dann gilt z.B. $u \leq x$ and $v \leq x$ und so wegen der Definition $u \leq v$ oder $v \leq u$.) Also besteht V aus einer endlichen Reihe $u_1, ..., u_n$ von Elementen, so daß $u_1 \leq u_2 \leq .... \leq u_n$. $u_n$ ist das gesuchte Element.

Obwohl der hier definierte Begriff eines Baumes ein rein marthematischer ist, so bedient man sich in der Praxis, wenn man über Bäume redet, fast immer einer botanischen Metaphorik - das Wort "Baum" selbst ist davon ein Beispiel und auch den Term "Wurzel(knoten) haben wir schon kennengelernt. Aber es gibt noch viele andere. Z.B. bezeichnet man die Endknoten eines Baumes - also die Knoten x, so daß für kein y außer x gilt: $x \leq y$ - oft als "Blätter" und die Pfade, die von der Wurzel zu den Blättern führen, als "Äste". Unintuitiv aus der Perspektive dieser Metaphorik ist allerdings, daß zumindest in der Linguistik Bäume meist umgekehrt gezeichnet werden, mit dem Wurzelknoten ganz oben und den Blättern unten.

## Verbände und Halbverbände

Die nächsten beiden Begriffe, die wir betrachten, sind eng miteinander verwandt; es sind der Begriff eines *Verbandes* und der eines *Halbverbandes*. Der allgemeinere ist der Begriff *Halbverband*. Diesen definieren wir also zuerst.

Ebenso wie Bäume lassen sich Halbverbände als partielle Ordnungen mit besonderen Eigenschaften charakterisieren. (Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, gibt es aber auch noch eine konzeptuell ganz unterschiedliche Charakterisierung solcher Ordnungen.) Und zwar ist der Begriff eines endlichen Baums von dem eines Halbverbands subsumiert: Bäume sind Halbverbände besonderer Art.

In der folgenden Definition ist von einem *unteren* Halbverband die Rede. Auf der übernächsten Seite werden wir den Sinn dieses zusätzlichen "unterer" erklären. Bis dahin ist es zu ignorieren.

Def. 41 Ein *unterer Halbverband mit Elementenmenge* U ist eine zweistellige Relation $\leq$ auf U mit den zusätzlichen Eigenschaften:

(i) Es gibt ein $\leq$-kleinstes Element u: $(\forall x)(x \varepsilon U \rightarrow u \leq x)$

(ii) Für beliebige Elemente x, y aus U gibt es ein Element z für das gilt: (a) $z \leq x$; (b) $z \leq y$; und (c) $(\forall u)(u \leq x \;\&\; u \leq y \rightarrow u \leq z)$

Ähnlich wie bei einem Baum ist das kleinste Element eines Halbverbands eindeutig bestimmt. Überdies ist auch das größte

Element unterhalb von zwei beliebigen Elementen x und y eindeutig bestimmt.

Thm. 67 Sei $\leq$ ein unterer Halbverband auf U.

1. Es gibt genau ein $\leq$-kleinstes Element. (Dieses Element wird oft als die *Null* des Halbverbandes bezeichnet.)

2. Seien x, y Elemente aus U. Dann gibt es genau ein Element z mit den Eigenschaften: (a) $z \leq x$; (b) $z \leq y$; und (c) $(\forall u)(u \leq x \;\&\; u \leq y \rightarrow u \leq z)$. (Dieses Element wird das *Infimum* (oder auch der *Duchschnitt*) von y und z genannt.)

Beweis: Übung

Bemerkung. Wie aus Thm. 66.2 ersichtlich, ist ein endlicher Baum ein unterer Halbverband. Auch in einem endlichen Baum ist also der höchste Knoten der unterzwei belieb igen Knoten x und y liegt, eindeutig bestimmt. Dies geht aus den üblichen graphischen Darstellungen von Bäumen auch klar hervor: Der "größte Knoten unterhalb von x und y" ist in "botanischer" Terminologie der Knoten, bei dem sich die Äste, die zu x und y führen, teilen.

In Def. 41 ist von einem *unteren* Halbverband die Rede. Das "untere" in diesem Ausdruck bezieht sich primär auf die Bedingung 41.ii, in der die Existenz eines *größten* Elements *unterhalb* von x und y verlangt wird. Es gibt nun eine zu 17.ii "duale" Bedingung, in der von einem kleinsten Element oberhalb von x und y die Rede ist. Eine partielle Ordnung, die diese duale Bedingung erfüllt - und statt 17.i eine Bedingung, die zu 17.i dual ist und ein größtes Element überhaupt verlangt - wird ein *oberer Halbverband* genannt.

Def. 42 Ein *oberer Halbverband mit Elementenmenge* U ist eine zweistellige Relation $\leq$ auf U mit den zusätzlichen Eigenschaften:

(i) Es gibt ein $\leq$-größtes Element u, $(\forall x)(x \in U \rightarrow x \leq u)$. (Dieses Element nennt man die "Eins" des Halbverbandes.)

(ii) Für jede zwei Elemente x, y aus U gibt es ein Element z für das gilt: (a) $x \leq z$; (b) $y \leq z$; und

(c) $(\forall u)(x \leq u \;\&\; y \leq u \rightarrow z \leq u)$
(z nennt man das "Supremum von x und y".)

Wie wir gesehen haben, ist mit $\leq$ auch ihre Konverse $\geq$ eine schwache Halbordnung. Aus den Definitionen 141, 42 folgt überdies, daß $\geq$ ein oberer Halbverband ist genau dann, wenn $\leq$ ein unterer Halbverband ist, und daß $\geq$ ein unterer Halbverband ist genau dann, wenn $\leq$ ein oberer Halbverband ist.

Ein *Verband* ist nun eine partielle Ordnung, die gleichzeitig unterer und oberer Halbverband ist. Aufgrund der soeben gemachten Beobachtung folgt, daß man diesen Begriff auch so charakterisieren kann: $\leq$ ist ein Verband genau dann, wenn $\leq$ und ihre Konverse $\geq$ beide untere Halbverbände sind.

Def. 43. $\leq$ ist ein *Verband auf* der Menge U gdw. $\leq$ sowohl unterer als auch oberer Halbverband auf U ist.

Unter den Verbänden gibt es viele aus theroretischer und anwendungsorientierter Sicht wichtige Untertypen, in denen bestimmte Infima und Suprema in besonderen Beziehungen zueinander stehen. Ein wichtiger Subtyp ist der eines *distributiven* Verbandes. Ein distributiver Verband ist ein Verband, in dem für beliebige Elemente x, y und z gilt, daß wenn

(i) $x \cup y$ das Supremum von x und y,
(ii) $x \cup z$ das Supremum von x und z,
(iii) $(x \cup y) \cap (x \cup z)$ das Infimum von $x \cup y$ und $x \cup z$,
(iv) $y \cap z$ das Infimum von y und z, und
(v) $x \cup (y \cap z)$ das Supremum von x und $y \cap z$, dann gilt:

(*) $(x \cup y) \cap (x \cup z) = x \cup (y \cap z)$.

(Es sei hier an das entsprechende Gesetz $\vdash ((p \vee q) \;\&\; (p \vee r)) \leftrightarrow (p \vee (q \;\&\; r))$ der Aussagenlogik erinnert!) Die Formulierung solcher Gesetzmäßigkeiten ist allerdings recht umständlich, wenn wir wie bisher nicht formal über die Operationen $\cup$ und $\cap$ verfügen, von denen wir in (*) einen informellen Gebrauch gemacht haben.[18] Der Einführung dieser Operationen steht aber nichts im Wege. Dies sei unsere nächste Aufgabe.

## Mehrstellige Funktionen und Operationen.

Bevor wir uns mit dem Operationsbegriff auseinandersetzen können, müssen wir zuerst den soweit eingeführten Funktionsbegriff erweitern. Auf S. 83 haben wir Funktionen als besondere zweistellige Relationen eingeführt. Diese Funktionen sind alle einstellig, in dem Sinne, daß sie einzelne Elemente als Argumente nehmen. Intuitiv gibt es aber nicht nur solche einstellige sondern auch mehrstellige Funktionen, wie z.B. die Summe und das Produkt zweier Zahlen oder die von drei Punkten aufgespannte Fläche.

Wie sollen wir die Begriffe einer 2-, 3- , ..., n-Stelligen Funktion definieren? Es liegt auf der Hand, von dem Begriff eines n-Tupels Gebrauch zu machen, den wir auf S. 88,89 eingeführten, indem wir n-stellige Funktionen als Funktionen definieren, die gewissen Mengn von n-Tuplen Werte zuordnen. Damit ist eine n-stellige Funktion eine Relation zwischen n-Tupeln und Elementen.

Nach dieser Charakterisierung ist eine n-stellige Funktion immer auch eine Funktion im früheren Sinne, die sich nur deshalb als n-stellige Funktion ausnimmt, weil ihr Argumentbereich aus n-Tupeln besteht. Und sonst sind dem Argumentbereich keine weiteren Bedingungen auferlegt. Für unsere Zwecke ist dieser Begriff noch etwas zu allgemein. In der Praxis sind n-stellige Funktionen im allgemeinen für alle n-Tupeln definiert, die man aus den Elementen einer vorgegebenen Menge U bilden kann - mit anderen Worten, der Argumentbereich einer solchen Funktion ist die Menge aller n-Tupeln der Menge $U^n$. Sind überdies die Werte einer solchen Funktion alle in einer Menge V enthalten, so bezeichnen wir die Funktion eine *n-stellige Funktion von* U *nach* V.

Bei der formalen Definition des Begriffs *n-stellige Funktion* müssen wir allerdings ebenso wie bei der Definition auf S. 89 von n-stelligen Relationen den schon früher eingeführten Fall - hier den der

---

[18] "Informell" in dem Sinne, daß wir das Supremum von x und y "$x \cup y$" genannt haben (statt etwa "a" oder "w" oder was denn auch. "$x \cup y$" is nicht weiter als ein komplexer Name für dieses Supremum; das Symbol "$\cup$", das in diesem Namen vorkommt, dient nur der leichteren Lesbarkeit der Ausdrücke, in denen es vorkommt, hat aber keine selbständige Bedeutung.

"einstelligen" Funktionen - als Sonderfall behandeln. Die Definition enthält weiter keine Überraschungen.

Def. 44 1. Seien U und V Mengen. Sei n >1. Eine n-*stellige Funktion von* U *nach* V ist eine Funktion mit Argumentbereich $U^n$ und Wertebereich $\subseteq$ V.
2. Ein einstellige Funktion von U nach V ist eine Funktion (im Sinne von Def. 21, S. 84) mit Argumentbereich U und Wertebereich $\subseteq$ V.

Wenn F eine n-stellige Funktion von U nach V ist, so wird U oft als "Argumentbereich" von F bezeichnet. Eigentlich widerspricht dieser Gebrauch unserer früheren Definition des Argumentbereichs einer Funktion. In der Praxis dürfte dies aber nicht zu Mißverständnissen führen.

Natürlich gibt es auch n-stellige Funktionen, die nicht für die gesamte Menge $U^n$ sondern nur für eine echte Teilmenge davon definiert sind. Nach der obigen Definition sind solche "Funktiohnen" keine Funktionen von U nach V, obwohl sie natürlich genauso wie die Funktionen im Sinne der Definition Realtionen zwischen n-Tupeln aus U und Elementen aus V sind. Solche "Funktionen" werden oft als "partielle (n-stellige) Funktionen von U nach V bezeichnet. (In diesem Kurs wird wird aber der Begriff einer partiellen Funktion kaum eine Rolle spielen.

##

Operationen sind Funktionen. Zum Beispiel ist die Operation, die aus zwei Elementen x und y eines Verbandes ihr Supremum bildet, eine zweistellige Funktion, deren Argumentbereich das Feld des Verbandes ist (genauer: die Menge von allen Paaren von Elementen dieses Feldes; siehe oben), und deren Wertebereich in dieser Menge enthalten ist. (Die letztere Bedingung gilt allgemein für Operationen; Operationen sind Funktionen, deren Werte wiederum zu ihrem Argumentbereich gehören.)

Wie wir gesehen haben, garantiert ein Verband die Existenz der Supremums-Operation, weil es für beliebige Elemente x und y ein eindeutig bestimmtes Supremum gibt. Ebenso existiert in jedem Verband die Operation, die jedem Paar von Elementen x, y ihr Infimum zuordnet. Diese Überlegungen zeigen, daß es bei einem Verband gerechtfertigt ist, von solchen Operationen zu reden. Was uns aber noch fehlt, ist der formale Apparat, der es uns ermöglichen sollte, auf solche Operationen (sowie auf Funtionen überhaupt) direkten Bezug zu nehmen. Insbesondere enthält der Prädikatenkalkül, wie wir ihn bisher definiert haben, Symbole, die diesen Bezug erlauben. Wir sind deswegen veranlaßt, den Prädikatenkalkül abermals zu erweitern. (Diese Erweiterung wird aber die letzte sein!) Die Symbole, die wir dem Predikatenkalkül in dieser letzten Erweiterung hinzufügen, werden *Funktionskonstanten* oder auch *Funktoren* oder *Operatoren* genannt. Die Einführung dieser Funktionskonstanten ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

## Prädikatenlogik mit Funktionskonstanten.

Wie wir gesehen haben, sind Funktionen nach der Anzahl ihrer Argumente zu klassifizieren: Es gibt 1-stellige Funktionen, die einen Wert liefern, wenn man ihnen ein einzelnes Argument gibt, wie z.B das Quadrat einer Zahl, der Vater einer Person, oder die Potenzmenge einer Menge; es gibt zwei-stellige Funktionen, die einen Wert für ein Paar von Argumenten liefern, wie z.B. die Summe zweier Zahlen, die Vereinigung zweier Mengen oder der gemeinsame Bekanntenkreis zweier Personen (hier ist der Wert der Funktion eine Menge von Personen, die in vielen Fällen leer sein wird!); und darüber hinaus gibt es dreistellige Funktionen, vierstellige Funktionen, usw. und wir gehen davon aus, daß es n-stellige Funktionen gibt für jede beliebige endliche Zahl n, auch wenn es mit steigendem n immer schwerer fällt, intuitiv plausible Beispiele zu finden.

Um sicherzustellen, daß es an möglichen Bezeichnungen für alle solche Funktionen nie fehlen wird, erweitern wir den Prädikatenkalkül für jedes n um unendlich viele n-stellige Funktionskonstanten $f^n{}_i$.

Jede solche Funktionskonstante $f^n{}_i$ kann zu einem wohlgeformten Ausdruck ergänzt werden, indem man ihm n Terme $t_1,...,t_n$ beigibt. Wir schreiben diese Terme in Klammern hinter der Funktionskonstante, also $f^n{}_i(t_1,...,t_n)$. Der so entstandene Ausdruck ist aber nicht wie $P^n{}_i(t_1,...,t_n)$ eine Formel - er ist kein Ausdruck, von dem man fragen könnte, ob er wahr ist oder falsch. Vielmehr bezeichnet er selbst wieder ein Objekt, genau so wie die Terme, die der Funktionskonstante $f^n{}_i$ als Argumente folgen, ist $f^n{}_i(t_1,...,t_n)$ also selbst auch wieder als Term zu betrachten. Damit ergibt sich jetzt für Terme ein rekursiver Aufbau, sowie in dem bisher entwickelte Prädikatenkalkül der Aufbau der Fromeln (aber nicht der Terme) ein rekursives Verfahren war. Der

Teil der Syntax, in dem die Menge aller Terme definiert wird, gewinnt damit eine Bedeutung, die sie bisher nicht hatte.

Die jetzt folgende Definition des Prädikatenkalküls mit Funktionskonstanten und Identität ist weitgehend eine Wiederholung von Bekanntem. Der Übersichtlichkeit wegen führen wir auch die alten Klauseln noch mal auf. Der einzige Untereschied gegenüber der letzten Definition (S. 97) findet sich in der Hinzunahme der Funktionskonstanten (Symbole, 9) und der rekursiven Klausel in der Definition der Terme (Terme, 3).

Def. 45 (Syntax des Prädikatenkalküls mit Funktionskonstanten und Identität.)

Symbole:

1. Aussagenkonstanten: $p_1, p_2, p_3, \ldots$
2. Junktoren: $\neg$, &, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
3. Klammern: (,).
4. n-stellige Prädikatsymbole: $P^n{}_i$, für alle n, i $\geq 1$
5. Variablen: $v_1, v_2, v_3, \ldots$
6. Individuenkonstanten: $c_1, c_2, c_3, \ldots$
7. Quantoren: $\forall, \exists$.
8. Identität: =
9. n-stellige Funktionskonstanten: $f^n{}_i$, für alle n, i $\geq 1$

<u>Terme</u>: 1. Jede Variable ist ein *Term*
2. Jede Individuenkonstante ist ein *Term*.
3. Sei $n \geq 1$. Wenn $t_1, ..., t_n$ Terme sind, dann ist $f^n{}_i(t_1, ..., t_n)$ ein *Term*

<u>Formeln:</u> 1. Jede Aussagenkonstante ist eine *Formel*.
2. Sei $n \geq 1$. Wenn $t_1, ..., t_n$ Terme sind, dann ist $P^n{}_i(t_1, ..., t_n)$ eine *Formel*.
3. Wenn $t_1$ und $t_2$ Terme sind, dann ist $t_1 = t_2$ eine *Formel*.
4. Wenn A, B Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, $(A \;\&\; B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, und $(A \leftrightarrow B)$ *Formeln*.
5. Wenn A eine Formel ist und v eine Variable, dann sind auch $(\forall v)A$ und $(\exists v)A$ *Formeln*.

Auch in der Semantik für den erweiterten Prädikatenkalkül bleibt das meiste beim Alten. Änderungen gibt es nur an zwei Stellen. Erstens müssen wir den Modellbegriff dahingehend ändern, daß die Interpretationsfunktion I jetzt auch Funktionskonstanten die intuitiv richtigen semantischen Werte zuordnet. Diesbezüglich haben wir uns schon weitgehend festgelegt: Eine n-stellige Funktionskonstante sollte in einem Modell $\langle U,I \rangle$ eine n-stellige Funktion von Elementen des Universums U nach Elementen aus U bezeichnen.

Diese Formulierung läßt aber einen Punkt offen: Genau was ist als der Argumentbereich dieser Funktionen zu betrachten? Natürlich sollen die Argumente n-Tupeln von Elementen aus U sein. Aber welche? An diesem Punkt hat die klassische Logik eine aus vielen Gesichtspunkten vernünftige, dennoch aber nicht rein intuitiv begründbare Wahl getroffen: Die Interpretion einer n-stelligen Funktionskonstante $f^n{}_i$ in einem Modell $\langle U,I \rangle$ soll immer eine n-stellige Funktion von U nach U sein, eine Funktion, also, deren Argumentbereich die gesamte Menge $U^n$ ist.

Wir können nun den Begriff eines Modells für den erweiterten Prädikatenkalkül wie folgt definieren:

<u>Def. 46</u> Ein *Modell für* den Prädikatenkalkül mit Funktionskonstanten ist ein Paar $M = <U_M, I_M>$, wobei

(i) $U_M$ (das *Universum von* M) eine nicht-leere Menge; und

(ii) $I_M$ eine Funktion, die den Individuenkonstanten, Prädikaten und Funktionskonstanten Bedeutungen zuordnet; und zwar:

(a) $I_M(p_i)$ ist einer der Wahrheitwerte 0, 1;
(b) $I_M(c_i)$ ist ein Element von $U_M$;
(c) $I_M(P^1{}_i)$ ist eine Teilmenge von $U_M$; und wenn $n > 1$, dann ist $I_M(P^n{}_i)$ eine Menge von n-Tupeln von Elementen aus $U_M$.
(d) $I_M(f^1{}_i)$ ist eine Funktion von $U_M$ nach $U_M$; und wenn $n > 1$, dann ist $I_M(f^n{}_i)$ eine Funktion von der Menge $U_M{}^n$ von n-Tupeln von Elementen aus $U_M$ nach $U_M$.

Auch an der Wahrheitsdefinition ändert sich wenig. Hier ist das einzig Neue die letzte Bedingung in der Definition der Termenwerte, welche der rekursiven Klaus 3 der Termendefinition in Def. 20 entspricht.

<u>Def. 47</u> (<u>Semantik des Prädikatenkalküls mit Funktionskonstanten und Identität</u>.)

Sei $M = <U_M, I_M>$ ein Modell und **a** eine Belegung in $U_M$.

A. (<u>Bedeutungen von Termen</u>)

1. Wenn t die Variable $v_j$ ist, dann ist $[t]_{M,\mathbf{a}} = \mathbf{a}(v_i)$;
2. Wenn t die Konstante $c_j$ ist, dann ist $[t]_{M,\mathbf{a}} = M(c_i)$.
3. Wenn t der Term $f^n{}_i(t_1, ..., t_n)$ ist, dann ist $[t]_{M,\mathbf{a}} = I_M(f^1{}_i)$ $([t_1]_{M,\mathbf{a}}, ..., [t_n]_{M,\mathbf{a}})$

B. (<u>Wahrheitsdefinition</u>)

Der *Wahrheitwert von* einer Formel A *in* M *bezüglich* **a**, $[A]_{M,\mathbf{a}}$, ist wie folgt definiert:

(i) a. $[p_j]_{M,\mathbf{a}} = I_M(p_i)$

b. wenn t ein Term, dann ist
$[P^1{}_j(t)]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw. $[t]_{M,\mathbf{a}} \varepsilon U_M(P^1{}_j)$

c. wenn $n > 1$ und $t_1, ..., t_n$ sind Terme, dann ist
$[P^n{}_i(t_1, ..., t_n)]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw.
$<[t_1]_{M,\mathbf{a}}, .., [t_n]_{M,\mathbf{a}}> \varepsilon U_M(P^n{}_j)$

d. wenn $t_1, t_2$ Terme sind, dann ist
$[t_1 = t_2]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[t_1]_{M,\mathbf{a}}$ gleich $[t_2]_{M,\mathbf{a}}$.

(ii) a. $[\neg A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$

b. $[A \,\&\, B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$

c. $[A \vee B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ oder $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$

d. $[A \rightarrow B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw $[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$ oder $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$

e. $[A \leftrightarrow B]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw ($[A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} = 1$)
oder ($[A]_{M,\mathbf{a}} = 0$ und $[B]_{M,\mathbf{a}} =$
$0$)

(iii) a. $[(\forall v_j)A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw für jedes Objekt u in $U_M$
gilt: $[A]_{M,\mathbf{a}[u/v_i]} = 1$

b. $[(\exists v_j)A]_{M,\mathbf{a}} = 1$ gdw es ein Objekt u in $U_M$
gibt, so daß gilt:
$[A]_{M,\mathbf{a}[u/v_i]} = 1$

##

Die Funktionssymbole gehören zu dem nicht-logischen Vokabular des Prädikatenkalküls. (Denn ihre Interpretationen werden durch $I_M$ bestimmt, sind also vom jeweiligen Modell abhängig.) Dies bedeutet, daß eine Sprache des erweiterten Prädikatenkalküls, die entsteht, indem eine Teilmenge des nicht-logischen Vokabulars gewählt wird, nicht nur eine Einschränkung der verwendbaren Prädikate, Aussagenkonstanten und Individuenkonstanten, sondern auch der Funktionskonstanten involviert. Wie vorhin identifizieren wir Sprachen mit den Mengen der ihnen zugehörigen nicht-logischen Konstanten und betrachten wir als Modelle für eine solche Sprache L die Strukturen <U,I>, in der I nur für die nicht-logischen Konstanten von L definiert ist.

In Anwendungen der Prädikatenlogik in der Mathematik werden oft Sprachen verwendet, die ausschließlich aus Funktionskonstanten bestehen. Solche Sprachen entsprechen dem, was man in der Mathematik unter einer "Algebra" versteht. Genauer gesagt: die Modelle für solcher Sprachen sind genau die Strukturen, die in der Mathematik *Algebren* genannt werden.

Die Verwendung von Funktionskonstanten ist aber nicht nur in mathematischen Anwendungen von Nutzen. Funktionskonstanten können auch bei der Formalisierung von Sätzen aus der Umgangssprache, die nicht über Mathematisches reden, gute Dienste leisten. Hier folgen einige Beispiele:

(1) Der Vater von Fritz liebt seine Mutter.

Mit dem Übersetzungsschlüssel:

(i) c: Fritz;
(ii) v(x): "der Vater von x";
(iii) m(x): "die Mutter von x";
(iv) L(x,y): "x liebt y"

läßt sich (1) wie folgt formalisieren:

(2) L(v(c)), m(c))

Die Knappheit und Transparenz dieser Formalisierung bildet einen nicht zu übersehenden Kontrast mit den Übersetzungen, mit denen man sich abfinden muß, wenn man auf Funktionskonstanten verzichtet und die Begriffe "Vater von" und "Mutter von" als zweistellige Prädikate repräsentiert. Erstens ist nicht ohne weiteres klar, wie man den Beitrag einer definiten Nominalphrase wie *der Vater von Fritz* genau ausdrücken soll, wenn keine Funktionskonstante "Vater von" sondern lediglich das zweistellige Prädikat "ist Vater von" zur Verfügung steht. In der Logik wird in diesem Zusammenhang auch heute noch auf einen Vorschlag von Bertrand Russell zurückgegriffen, seine "Theory of

Descriptions".[19] Nach diesem Vorschlag bedeutet ein Satz von der Form "P(der Vater von Fritz)" (also etwa: "Der Vater von Fritz ist Pole.", "Der Vater von Fritz spielt Schach." usw.) soviel wie: es gibt einen und nur einen Vater von Fritz und dieser erfüllt das Prädikat P". In der Notation der Prädikatenlogik läßt sich dieses durch die folgende Formel ausdrücken:

(3) $(\exists x)(V(x,c) \,\&\, (\forall y)(V(x,c) \rightarrow y = x) \,\&\, P(x))$

(V ist hier das zweistellige Prädikat "ist Vater von" und c ist eine Individuenkonstante, die Fritz bezeichnet.)

Die Formalisierung von (1) erfordert zwei Anwendungen der "Theory of Descriptions", eine für das Subjekt und eine für das Objekt. Das Ergebnis (mit M als zweistelligem Prädikat für "ist Mutter von"

(4) $(\exists x)(V(x,c) \,\&\, (\forall y)(V(x,c) \rightarrow y = x) \,\&\, (\exists u)(M(u,c) \,\&\, (\forall v)(V(v,c) \rightarrow v = u) \,\&\, L(x,u)))$

Bei komplexeren Sätzen wird, wie sich anhand von Beispielen wie (5) und (6) erkennen läßt, die Diskrepanz zwischen Übersetzungen mit und ohne Funktionskonstanten immer brisanter.

(5) Der Vater von der Mutter von Fritz liebt die Mutter von dem Vater von Fritz.

(6) Nicht immer, wenn der Vater der Mutter eines Schülers die Mutter seines Vaters liebt, liebt auch der Vater des Vaters dieses Schülers die Mutter seines Vaters.

(5) läßt sich mit Funktionskonstanten als (7) übersetzen, ohne Funktionskonstanten ist die Übersetzung so komplex wie in (8):

(7) $L(v(m(c)), m(v(c)))$
(8) $\neg(\forall x)(S(x) \,\&\, (L(v(m(x)), m(v(x))) \rightarrow L(v(v(x)), m(m(x)))\ )$

---

[19] Russells Theory of Descriptions hat in der Sprachphilosophie und der Philosophie der Logik eine sehr wichtige Rolle gespielt, ist aber nach jetzigen linguistischen Kenntnissen als allgemeine Analyse von definiten Kennzeichnungen (d.h. von Nominalphrasesn von der Form "Der/die/das ...") in ihrer ursprünglichen Form kaum vertretbar. Für unsere augenblicklichen Zwecke sind die Einwände gegen sie aber nict relevant.

Noch größer ist der Unterschied zwischen beiden Übersetzungen von (6).

(N.B. Der Satz (6) ist mehrfach ambig, weil die beiden Vorkommen des Possessivpronomens *sein* sich nicht nur auf Fritz sondern auch auf den einen oder anderen der erwähnten Väter beziehen kann. Wie wir schon früher beobachten konnten, gibt es solche Ambiguitäten in natürlichen Sprachen zuhauf.)

Zuletzt betrachten wir hier die Sätze (9) und (10)

(9) Das Produkt zweier Zahlen ist nicht immer größer als ihre Summe.

(10) Es gibt genau zwei Zahlen, für die das Doppelte gleich ist mit dem Quadrat.

(11) ist die Formalisierung von (9).

(11) $\neg(\forall x)(\forall y)(Z(x) \ \& \ Z(y) \rightarrow G(p(x,y), \ s(x,y)))$

Wobei "Z" das einstellige Prädikat "Zahl", "G" das zweistellige Prädikat "größer als", p die zweistellige Funktionskonstante "Produkt von" und die zweistellige Funktionskonstante "Summe von" darstellt.

Die Formalisierung von (10), um die es uns hier geht, ist eine, die von denselben nicht-logischen Konstanten Gebrauch macht, die wir in (11) verwendet haben. Diese Wiederverwendung der in (11) verwendeten Prädikate basiert auf dem allgemeinen mathematischen Wissen, daß das Quadrat einer Zahl das Produkt von dieser Zahl mit sich selbst ist und daß das Doppelte einer Zahl x die Summe ist von x und x.

Wenn man die Ausdrücke "Quadrat" und "Doppelte" so analysiert, läßt sich (10) wie in (12) übersetzen:

(12) $(\exists x)(\exists y)(Z(x) \ \& \ Z(y) \ \& \ s(x,x) = p(x,x) \ \& \ s(y,y) = p(y,y) \ \& \ x \neq y \ \&$
$(\forall u)(Z(u) \ \& \ s(u,u) = p(u,u) \rightarrow (u = x \ \vee \ u = y)))$

Genau wie bei den Analysen der Prädikate "mindestens so groß", "gleich groß" und "größt" in Termen von "größer als", die in früheren Übersetzungsübungen angesprochen wurden, sind auch im vorliegenden Fall die verwendeten Reduktionen notwendig, wenn die prädikatenlogischen Übersetzung die logischen Beziehungen zwischen den übersetzten Sätzen sichtbar machen soll.

## Verbände und Funktionskonstanten.

Wir wenden uns jetzt dem Problem zu, das wir zum Anlaß für die Einführung von Operationskonstanten in die Prädikatenlogik gemacht hatten. Wir haben einen Verband als eine partielle Ordnung mit besonderen Eigenschaften definiert. Wir wiesen darauf hin, daß es wichtige Teiltypen von Verbänden gibt, vertagten aber die Diskussion dieser Typen, bis uns der erweiterte Formalismus der Prädikatenlogik mit Funktionskonstanten zur Verfügung stehen würde. Nachdem wir diese Erweiterung jetzt definiert haben, kehren wir zu dem Thema "besondere Typen von Verbänden" zurück.

Wie bei unseren bisherigen Formalisierungsversuchen machen wir von prädikatenlogischen Sprachen Gebrauch, die genau die nicht-logischen Konstanten enthalten, welche wir für unsere besondere Zwecke benötigen. Wir beginnen mit der Sprache $L_{\leq} = \{\leq\}$ und wiederholen nochmal die Definition des Begriffs eines Verbandes, jetzt in der Form einer Theorie $T_{Verb}$ in der Sprache $L_{\leq}$.

Def. 48 Ein *Verband auf* einer Menge U ist eine zweistellige Relation $\leq$, so daß $\langle U, \leq \rangle$ die aus den Axiomen $T_{Verb}.1$ - $T_{Verb}.7$ bestehenden Theorie $T_{Verb}$ erfüllt:

$T_{Verb}.1$ $(\forall x)(x \leq x)$

$T_{Verb}.2$ $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \;\&\; y \leq x \rightarrow x = y)$

$T_{Verb}.3$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq y \;\&\; y \leq z \rightarrow x \leq z)$

$T_{Verb}.4$ $(\exists v)(\forall x)(v \leq x)$

$T_{Verb}.5$ $(\forall x)(\forall y)(\exists v)(v \leq x \;\&\; v \leq y \;\&\; (\forall z)((z \leq x \;\&\; z \leq y) \rightarrow z \leq u))$

$T_{Verb}.6$ $(\exists u)(\forall x)(x \leq u)$

$T_{Verb}.7$ $(\forall x)(\forall y)(\exists u)(x \leq u \;\&\; y \leq u \;\&\; (\forall z)((x \leq z \;\&\; y \leq z) \rightarrow u \leq z))$

(Die ersten drei Axiome drücken aus, daß $\leq$ eine schwache partielle Ordnung ist, die nächsten beiden, daß $\leq$ ein unterer und die letzten zwei, daß $\leq$ ein oberer Halbverband ist.)

$T_{Verb}$ axiomatisiert den Begriff eines Verbandes: Wenn M ein Modell für $L_{\leq}$, dann ist $I_M(\leq)$ ein Verband auf $U_M$ genau dann wenn $M \models T_{Verb}$.

Wie schon bemerkt (vgl. Thm. 67.1), ist das im Axiom $T_{Verb}$.4 mit "u" angedeutete Element eindeutig bestimmt. Das bedeutet, daß wir dieses Element mit einer Individuenkonstante bezeichnen können. Genauer: wir fügen der Sprache eine Individuenkonstante zu (wir verwenden zu diesem Zweck das Symbol "0") und erweitern $T_{Verb}$ um ein neues Axiom, $T_{Verb}(0)$, das besagt, daß diese Konstante das $\leq$-kleinste Element des Diskursuniversums bezeichnet:

$T_{Verb}(0)$. $(\forall x)(0 \leq x)$

Ebenfalls ist das mit "u" in $T_{Verb}$.5 angedeutete Element eindeutig von x und y bestimmt (Thm. 67.2); diese funktionale Abhängigkeit können wir mit Hilfe einer zweistelligen Funktionskonstante darstellen: Wir erweitern die Sprache um eine solche Konstante, die wir als "$\cap$" bezeichnen, und fügen das Axiom $T_{Verb}(\cap)$ zu:

$$T_{Verb}(\cap).\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\cap(x,y) \leq x \ \&\ \cap(x,y) \leq y \ \&\ (\forall z)(z \leq x \ \&\ z \leq y \rightarrow z \leq \cap(x,y)))$$

oder, indem wir die üblichere "Infix-Notation" "$x \cap y$", statt "$\cap(x,y)$", usf. verwenden,

$$T_{Verb}(\cap).\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cap y \leq x \ \&\ x \cap y \leq y \ \&\ (\forall z)(z \leq x \ \&\ z \leq y \rightarrow z \leq x \cap y))$$

Ebenso können wir eine Individuenkonstante "1" und eine zweistellige Funktionskonstante $\cup$ einführen für das größte Element und das Supremum von x und y. Die entsprechenden Axiome sind $T_{Verb}(1)$ und $T_{Verb}(\cup)$:

$T_{Verb}(1)$. $(\forall x)(x \leq 1)$

$$T_{Verb}(\cup).\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq x \cup y \ \&\ y \leq x \cup y \ \&\ (\forall z)(x \leq z \ \&\ y \leq z \rightarrow x \cup y \leq z))$$

Die so entstandene Sprache, $\{\leq, 0, 1, \cap, \cup\}$, nennen wir $L'_{\leq}$ und die neue Theorie, die aus $T_{Verb}$ und den vier neuen Axiomen $T_{Verb}(0)$ - $T_{Verb}(\cup)$ besteht, $T'_{Verb}$. Es sollte klar sein, daß die neuen Axiome nichts Inhaltliches hinzufügen; sie führen lediglich Namen für Objekte ein, deren Existenz und Eindeutigkeit durch die Axiome von $T_{Verb}$ schon gewährleistet war. Also gilt für $T'_{Verb}$ genauso wie für $T_{Verb}$:

Thm. 68 Sei M ein Modell für $L'_{\leq}$. Dann ist $I_M(\leq)$ ein Verband auf $U_M$ gdw. $M \models T'_{Verb}$.

Von jetzt an werden wir systematischer als bisher von solchen Äquivalenzen Gebrauch machen. Wenn die partielle Ordnung $\leq$ auf der Menge U ein Verband auf U ist, dann ist $\langle U, \{\langle \leq, \leq \rangle\}\rangle$ ein Modell für die Sprache $L_{\leq}$, das die Theorie $T_{Verb}$ verifiziert, und umgekehrt; und Ähnliches gilt für $L'_{\leq}$ und $T'_{Verb}$: Ist $\leq$ ein Verband auf U, so gibt es ein und nur ein Modell $\langle U,I \rangle$ für $L'_{\leq}$, das $T'_{Verb}$ verifiziert und in dem $I(\leq) = \leq$; und gibt es ein solches Modell, so ist $\leq$ Verband auf U. Diese Äquivalenzen bedeuten, daß solche Strukturen wie partielle Ordnungen, Bäumen, Verbänden, als Modelle der Theorien, die diese Begriffe axiomatisieren andererseits, betrachtetwerden können. Also werden wir einfach davon ausgehen, daß ein Verband ein Modell der Theorie $T_{Verb}$ ist, und daß Modelle von Erweiterungen von $T_{Verb}$ (in derselben Sprache oder in Sprachen mit mehr Symbolen) immer Verbände sind. (Und analog für andere Struktur- oder Relationstypen.)

Es gibt eine Reihe von Bedingungen, die in allen Verbänden erfüllt sind und die sich mit Hilfe der neuen Operatoren besonders leicht und transparent formulieren lassen. Wir fassen die bekanntesten von diesen in dem folgenden Theorem zusammen.

Thm. 69 Sei $\leq$ ein Verband auf der Menge U und seien 0,1, $\cap$ und $\cup$ die durch $\leq$ im Sinne von $T_{Verb}(0)$ - $T_{Verb}(\cup)$ bestimmten Operationen. Dan gelten die folgenden Sätze:

1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq y \rightarrow x \cap z \leq y \cap z)$.
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq y \rightarrow x \cup z \leq y \cup z)$.
3. $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \leftrightarrow x \cap y = x)$.
4. $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \leftrightarrow x \cup y = y)$.
5. $(\forall x)(x \cap x = x)$
6. $(\forall x)\ x \cup x = x$
7. $(\forall x)(\forall y)\ x \cap y = y \cap x$
8. $(\forall x)(\forall y)\ x \cup y = y \cup x$

9. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$
10. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$
11. $(\forall x)(\forall y)\ (x \cup y) \cap x = x$
12. $(\forall x)(\forall y)\ (x \cap y) \cup x = x$
13. $(\forall x)\ x \cup 0 = x$
14. $(\forall x)\ x \cap 0 = 0$
15. $(\forall x)\ x \cup 1 = 1$
16. $(\forall x)\ x \cap 1 = x$

Beweis: Übung

N.B. Sätze von der Form der letzten zwölf Sätze von Theorem 69 (Satz 5 - Satz 16), die aus einer Gleichung bestehen, der eine oder mehrere All-Quantoren vorangehen, werden in der Verbandstheorie oft auch ohne den All-Quantor geschrieben. Z.B schreibt man statt "$(\forall x)(x \cap x = x)$" vereinfacht "$x \cap x = x$", statt "$(\forall x)(\forall y)(x \cap y = y \cap x)$" schreibt man "$x \cap y = y \cap x$", usw. In dieser verkürzten Notation ist also jede "freie" Variable als durch einen All-Quantoren gebunden zu lesen, der vor der gezeigten Formel steht. Von jetzt an werden wir immer wieder von dieser vereinfachenden Notation Gebrauch machen.

Jetzt zu den besonderen Typen von Verbänden. Zuerst führen wir formal den Begriff eines *distributiven* Verbands ein. Wie schon auf S. 116 bemerkt, gilt ein Verband als distributiv, falls zwischen den Suprema und Infima die folgende allgemeine Beziehung besteht:

$A_{dist.}$ $(x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$

Offensichtliche Beispiele von distributiven Verbänden sind wiederum die schon vorher erwähnten Ordnungsstrukturen, in denen das Universum eine Potenzmenge $P(X)$ und die Ordnungsrelation die mengentheoretische Inklusion $\subseteq$ zwischen den Mengen in $P(X)$ ist.

Ein anderes Beispiel, auf das wir hier nicht in Einzelheiten eingehen, aber das wir doch erwähnen wollen, ergibt die Menge aller deduktiv abgeschlossenen Theorien einer prädikatenlogischen Sprache L. (siehe S. 101). Dabei ist $\cap$ die Operation des mengentheoretischen Durchschnitts - $T_1 \cap T_2$ ist der mengentheoretische Durchschnitt von $T_1$ und $T_2$; es läßt sich leicht verifizieren, daß der Durchschnitt zweier deduktiv abgeschlossener Theorien wiederum deduktiv abgeschlossen ist! - und die Operation $\cup$ ist wie folgt definiert: $T_1 \cup T_2$ ist der deduktive Abschluß der Vereinigung von $T_1$ und $T_2$. Weiterhin ist die Eins des Verbandes die inkonsistente Theorie, die aus allen Sätzen von L besteht, und die Null die Theorie, die nur die logisch gültigen Sätze von L enthält.

Wir erwähnen diesen Beispielstyp insbesondere deshalb, weil solche Theorienverbände einerseits distributiv, andererseits im allgemeinen keine *Boolesche Algebren* sind. (Boolesche Algebren werden im nächsten Abschnitt eingeführt.) Eine Instanz dieses Typs, deren Eigenschaften sich verhältnismäßig leicht untersuchen lassen, ergibt sich, wenn wir für L die "leere" Sprache wählen, in der es nur das logische Prädikat = gibt und in der somit alle atomaren Formeln die Form "x = y" haben (wobei x und y Variablen sind.)

Das durch $A_{dist}$ ausgedrückte Prinzip ist bekannt unter dem Namen "Distributivitätsgesetz". Genauer gesagt, drückt es die Distributivität von $\cup$ über $\cap$ aus. Es gibt zu diesem "Gesetz" auch ein duales Distributivitätsprinzip, das Prinzip der Distributivität von $\cap$ über $\cup$; wir erhalten es, indem wir in $A_{dist}$ "$\cup$" durch "$\cap$" und "$\cap$" durch "$\cup$" ersetzen. Zur Charakterisierung von distributiven Verbänden hätten wir auch dieses duale Prinzip verwenden können, denn innerhalb der Theorie $T_{verb}$ ist jedes der beiden Prinzipien aus dem anderen ableitbar. Dieses ist der Inhalt von Theorem 70.

Thm. 70. Es gilt:

$$T_{verb} \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)) \leftrightarrow$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$$

##

## Boolesche Verbände/Boolesche Algebren.

Die für unsere Zwecke wichtigste der hier eingeführten Strukturen ist die eines *Booleschen Verbandes*, benannt nach dem englischen Mathematiker und Logiker George Boole (1815 - 1864). (Boole kann in gewisser Hinsicht als Erfinder des Aussagenkalküls betrachtet werden kann und gilt als einer der wichtigsten Grundleger der modernen Logik.) Ein Boolescher Verband ist ein distributiver Verband, der sich von distributiven Verbänden im allgemeinen dadurch unterscheidet, daß neben $\cap$ und $\cup$ noch eine dritte Operation definiert ist, und zwar eine einstellige, die aus einem willkürlichen Element x das sogenannte *Komplement* -x *von* x bildet. -x ist durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

(Komp) (i) $x \cap -x = 0$

(ii) $x \cup -x = 1$

Ebenso wie bei den Operationen $\cap$ und $\cup$ brauchen wir nur die Existenz eines Elementes mit diesen beiden Eigenschaften zu fordern; die Eindeutigkeit läßt sich mit Hilfe des Distributivitätsprinps $A_{dist}$ ableiten.

Def. 49. Ein Boolescher Verband ist eine Struktur, die die Axiome der Theorie $T_{Bool}$ verifiziert, wobei $T_{Bool} = T_{verb} + A_{dist} + A_{Bool}$; $A_{Bool}$ ist das Axiom:

$A_{Bool}$: $(\forall x)(\exists y)(x \cap y = 0 \ \& \ x \cup y = 1)$

Die Eindeutigkeit des in $A_{Bool}$ geforderten Elements läßt sich aus $T_{Bool}$ ableiten. Genauer, sie folgt schon aus der Theorie $T_{verb} + A_{dist}$, gilt also in allen distributiven Verbänden. Dies zeigt sich in dem Beweis von Thm. 71, in dem wir diese Beobachtung wiederholen:

Thm 71. $T_{verb} + A_{dist} \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \cap y = 0 \ \& \ x \cup y = 1 \ \& \ x \cap z = 0 \ \& \ x \cup z = 1) \rightarrow y = z)$

Beweis: Seien b und c Elemente, die beide die definierenden Bedingungen für das Komplement von a erfüllen, also:

$a \cap b = 0$, $a \cup b = 1$, $a \cap c = 0$ und $a \cup c = 1$. Dann gilt:
$c = 0 \cup c = (a \cap b) \cup c =$ (mit $A_{dist}$) $(a \cup c) \cap (b \cup c) = 1 \cap (b \cup c) = b \cup c$. Aber wenn $c = b \cup c$, dann $b \leq c$. Genauso beweist man, daß $c \leq b$. Es folgt, daß $b = c$. Da a beliebig gewählt werden kann, folgt die Eindeutigkeit des Komplements.

$A_{Bool}$ und Thm. 12 erlauben uns - wie das vorhin mit $\cap$ und $\cup$ der Fall war, eine Funktionskonstante - einzuführen, so daß -(x) das Komplement von x bezeichnet. Genau gesprochen bedeutet dies, daß wir unsere prädikatenlogische Sprache noch ein mal um ein neues Symbol, die einstellige Funktionskonstante -, erweitern und unserer Theorie $T_{Bool}$ die Axiome $A_{-,\cap}$ und $A_{-,\cup}$ hinzufügen. Statt "-(x)" schreiben wir "-x".

$A_{-,\cap}$. $(\forall x)(x \cap -x = 0)$

$A_{-,\cup}$ $(\forall x)(x \cup -x = 1)$

Boolesche Verbände haben viele Eigenschaften, die sie von Verbänden im allgemeinen unterscheiden. Einige wichtige findet man im folgenden Theorem:

<u>Thm. 72</u> Boolesche Verbände haben die folgenden Eigenschaften. (Oder: die folgenden Behauptungen folgen aus $T_{Bool}$.)

1. $(\forall x)(\forall y)(y \leq x \leftrightarrow y \cap -x = 0)$
2. $(\forall x)(\forall y)(y \leq x \leftrightarrow x \cup -y = 1)$
3. $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \leftrightarrow -y \leq -x)$
4. $x = --x$
5. $-(x \cap y) = -x \cup -y$
6. $-(x \cup y) = -x \cap -y$

(5. und 6. sind unter dem Namen der "Gesetze von De Morgan" bekannt. Augustus De Morgan (1806 - 1871) war ein bedeutender Mathematiker und (mit Boole, einer der Grundleger der modernen Logik in der Mittte des letzten Jahrhunderts.)

<u>Beweis</u>:

1 Nehmen wir zuerst an, daß $a \leq b$. Dann gilt nach Thm 10.1 , daß $a \cap -b \leq b \cap -b = 0$. Wenn umgekehrt $a \cap -b = 0$, dann gilt $b = b \cup 0 = b \cup (a \cap -b)$ = (mit Distributivität) $(b \cup a) \cap (b \cup -b) = (b \cup a) \cap 1 = b \cup a$. Also $a \leq b$.

2. Der Beweis ist dem von 1. analog.

3 Sei $a \leq b$. Dann gilt nach 1., daß $a \cap -b = 0$. Aber dann $-a =$

$-a \cup (a \cap -b) = (-a \cup a) \cap (-a \cup -b) = 1 \cap (-a \cup -b) = -a \cup -b$. Also gilt mit 2. daß $-b \leq -a$.

4. A ist ein Element ,das die Bedingungen für das Komplemernt von -a erfüllt. Dann folgt wegen der Eindeutigkeit, daß a mit dem Komplement von -a identisch; also a = --a.
5. Einerseits haben wir: $(-a \cup -b) \cup (a \cap b) =$
$((-a \cup -b) \cup a) \cap ((-a \cup -b) \cup b) = (a \cup (-a \cup -b)) \cap ((-a \cup -b) \cup b) =$
$((a \cup -a) \cup -b) \cap (-a \cup (-b \cup b)) = (1 \cup -b) \cap (-a \cup 1) = 1 \cup 1 = 1$
Andererseits: $(-a \cup -b) \cap (a \cap b) = (-a \cap (a \cap b)) \cup (-b \cap (a \cap b)) =$
$((-a \cap a) \cap b)) \cup ((a \cap b) \cap -b) = (-a \cap a) \cap b)) \cup (a \cap (b \cap -b)) =$
$(0 \cap b)) \cup (a \cap 0) = 0 \cup 0 = 0$. Also erfüllt das Element $-a \cup -b$ die beiden Bedingungen für das Komplement von $a \cap b$, ist somit mit dem Komplement identisch: $-a \cup -b = -(a \cap b)$.
6. Ähnlich wie 5.

♣

Nicht alle distributiven Verbände sind auch Boolesche Vebände. Beispiele solcher Verbände (distributiv aber nicht Boolesch) wurden schon erwähnt: Verbände, die aus allen deduktiv abgeschlossenen Theorien einer prädikatenlogischen Sprache bestehen. In solchen Verbänden gibt es im allgemeinen kein Komplement mit den Eigenschaften (i) und (ii) von S. 80. Dies zu beweisen würde hier aber zu weit führen.

Neben dem Begriff eines Booleschen Verbandes gibt es auch den einer *Booleschen Algebra*. Wieso diese doppelte Terminologie? Der Grund ist folgender. Einerseits lassen sich, wie wir gesehen haben, Boolesche Strukturen als ein besonderer Typ von Verband definieren. So sind wir hier auch verfahren. In diesem Ansatz ist ein Boolescher Verband wie jeder andere Verband eine zweistellige Relation mit gewissen Eigenschaften. Bei der Formulierung dieser Eigenschaften und bei unseren darauffolgenden Untersuchungen erwies es sich aber als nützlich, Bezeichnungen für bestimmte Operationen einzuführen, die sich in solchen Strukturen definieren lassen. (Insbesondere erlauben, wie wir sahen, die Booleschen Verbände die Einführung drei solcher Operationen - $\cap$, $\cup$ und -.) Nun läßt sich aber umgekehrt die Ordnungsrelation $\leq$ selbst wieder mit Hilfe dieser Operationen definieren, etwa durch die Formel in Thm. 13.3 oder durch die in Thm. 13.4:

(Thm. 69.3) $(\forall x)(\forall y)(y \leq x \leftrightarrow y \cap -x = 0)$

(Thm. 69.4) $(\forall x)(\forall y)(y \leq x \leftrightarrow x \cup -y = 1)$

Dies legt nahe, daß man bei der Charakterisierung von Booleschen (und auch anderen) Verbänden ebenfalls von den Operationen ausgehen könnte, indem man den Begriff eines Booleschen Verbandes in der Sprache $L_{BA} = \{\cap, \cup, -.\}$ axiomatisiert. Eine solche Axiomatisierung ist nicht nur möglich, sondernman kann ihr sogar eine besonders einfache Form geben, indem man sich ausschließlich auf universal quantifizierte Gleichungen beschränkt. Z.B. reichen die "Gleichungen 5 - 16 von Thm. 69 und die Gleichungen 4 -6 von Thm. 72 zusammen mit dem Distributivitätsprinzip $A_{dist}$ und den Gleichungen (Komp.i, ii) auf S. 130 hierzu aus. (N.B Diese Axiomenmenge enthält mehrere Redundanzen; man käme auch mit einer beträchltich kleineren Teilmenge aus. Auf welche Axiome man im Prinzip verzichten könnte, ist aber eine Frage, die wir hier nicht verfolgen.)

Wenn von Booleschen Strukturen als "Operationenstrukturen" die Rede ist - d. h. als Mengen von Operationen, die auf einer Grundmenge U definiert sind und die sich durch Erfüllung gewisser Gleichungen auszeichnen - wird vorzugsweise das Wort *Algebra* verwendet. "Algebra" wird (wie früher schon mal angedeutet) allgemein für Strukturen verwendet, deren Grundbegriffe ausnahmslos Operationen sind und die deshalb formal in einer Sprache charakterisiert werden können, in der es keine Prädikate, sondern nur Individuenkonstanten und/oder Funktionskonstanten gibt.

Übung.

Für jedes der folgenden Argumente sei (a) die Gültigkeit mit Hilfe der Venn-Diagramm-Methode zu überprüfen und (b) das Argument in den monadischen Prädikatenkalkül zu übersetzen. Beschreiben Sie überdies (c) mit Hilfe des Prädikatenkalküls die von Ihnen mit Hilfe der Venn-Diagramm-Methode konstruierten Gegenbeispiele für die nicht gültigen Argumente.

(1) Jeder Mensch ist sterblich. Sokrates ist ein Mensch. ⊧ Sokrates ist sterblich.

(2) Jeder Vertreter ist ein Mensch. Jeder Mensch ist sterblich. ⊧ Jeder Vertreter ist sterblich.

(3) Jeder Professor ist Beamter. Kein Beamter ist zufrieden. ⊧ Kein Professor ist zufrieden.

(4) Jeder Professor ist Beamter. Es gibt zufriedene Beamte. ⊧ Es gibt zufriedene Professoren

(5) Manche Politiker sind ehrlich. Manche Anwälte sind Politiker. ⊧ Es gibt ehrliche Leute, die Rechtsanwalt sind.

(6) Kein Belgier bewundert die Holländer. Keiner, der die Holländer bewundert, kommt ins Paradies. ⊧ Jeder Belgier kommt ins Paradies

(6) Jede Lüge ist eine Behauptung. Jede Behauptung ist eine Äußerung. Jede Äußerung ist eine Handlung. Jede Handlung ist ein Ereignis. Kein Ereignis ist materielles Objekt.
⊧ Keine lüge ist ein materielles Objekt.

Venn-Diagramme eine Semantik? Was repräsentieren die Kreise? Modell: Universum U (= die Punkte die die von dem Blatt bestimmte begrenzte Oberfläche ausmachen); Interpretation der Prädikate: (konvexe) Teilmengen dieser Punktmenge.

Allgemeiner: Modell: <U, I>, wo I jedem Prädikat eine Teilmenge von U zuordnet.

Faktum 1. (Ein Faktum der zwei-dimensionalen Geometrie): Alle möglichen topologischen Verhältnisse (Überschneidung, Inklusion, Disjunktheit) zwischen drei Extensionen werden von Konfigurationen instanziiert, in denen die Extensionen konvexe Mengen (Eier) sind

Faktum 2. Jede solche Situation läßt sich problemlos innerhalb des monadischen Prädikatenkalküls beschreiben.

Faktum 3. Die Lehre des Syllogismus ist ein Teilsystem des monadischen Prädikartenkalküls. Die syllogistischen Inferenzmuster sind alle Theoreme jedes adäquaten Beweissystems für den monadischen Kalkül. (Wir werden dies später genauer sehen.)

Monadischer Prädikatenkalkül und Konzepthierarchien (Vererbungsnetze)

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Wissensrepräsentation und insbesondere in der Computerlinguistik sind *Konzepthierarchien*, in denen die *Subsumptionsbeziehungen* zwischen Konzepten mit Hilfe von Graphen erfaßt werden (vornehmlich handelt es sich hier um Konzepte, die von Substantiva repräsentiert werden, aber auch andere einstellige Prädikate der natürlichen Sprache (intransitive verben, Adjektive) können oft mit Frucht in solchen Hierarchien eingeordnet werden.)

Beispiel: (Quillian (1969):

hat eine Haut
Tier ernährt sich
atmet

hat Flügel
Vogel
hat Federn

hat Flossen
Fisch
hat Kieme

singt
Nachtigall
bis zu 15 cm

rennt
Strauß
bis zu 2 m.

Scholle
lebt im Meer

Hecht
lebt in Süßwasser

Tweety nett Woofy launig

Symbolisierung im Prädikatenkalkül:

$(\forall x)\ (T(x) \rightarrow HeH(x))$
$(\forall x)\ (T(x) \rightarrow Es(x))$
$(\forall x)\ (T(x) \rightarrow At(x))$

$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow Fl(x))$
$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow Fe(x))$

$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow Si(x))$
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow 15cm(x))$
$Ne(tw)$

$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow Re(x))$
$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow 2m(x))$
$La(wo)$

$(\forall x)\ (V(x) \rightarrow T(x))$
$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow V(x))$
$N(tw)$
$(\forall x)\ (S(x) \rightarrow V(x))$
$S(wo)$

Mögliche weitere aus dem Graphen ablesbare Bedingungen: Konzepte, die zwei Schwesterknoten zugeordnet sind, schließen sich gegenseitig aus. Z.B. keine Nachtigall ist ein Strauß (und umgekehrt):

$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow \neg S(x))$

<u>Übung:</u> Ergänzen die monadenprädikatische Beschreibung von

das Merkamallgemeinen können Vögel fliegen, aber es gibt auch einige Vogelarten, die nicht fliegen können, wie z.B. der Strauß. Wir erfassen diesen Sachverhalt, indem wir das Merkmal "kann fliegen" als Merkmal von "Vogel" eintragen und dieses Merkmal dann "überschreiben", indem wir seine Verneinung "kann nicht fliegen" als Merkmal der Untersorte "Strauß" eintragen. So kommt man zu dem erweiterten Graphen (47). Die Inferenzmaschine, die aus einer solchen Hierarchie die darin enthaltenen Informationen extrahiert, muß in der Lage sein, bei der Vererbung von Merkmalen zu überprüfen, ob die von oben nach unten transportierten Merkmale auch weiter unten in der Tat noch gelten. Sie wird bei dem Versuch, das Merkmal "kann fliegen" von "Vogel" auf "Strauß" zu übertragen, scheitern, weil dort das Merkmal "kann fliegen" durch seine Verneinung "¬ kan fliegen" überschrieben ist. Der Übertragung des Merkmals auf "Nachtigall", dagegen, steht nichts im Wege und so wird geschlossen, daß Nachtigalle fliegen können.

N.B. In (47) ist der Gewinn, der sich daraus ergibt, daß man "kann fliegen" dem Konzept Vogel und seine Verneinung dem Unterbegriff "Strauß" hinzufügt, schlecht zu erkennen. Im Gegenteil, hier wäre es effizienter, sich damit zu begnügen, das Merkmal "kann fliegen" bei dem Konzept "Nachtigall" eintzutragen. In einem vollständigeren Netz, in dem es neben "Strauß" und "Nachtigall" noch viele andere Unterbegriffe von Vogel gibt, von denen die große Mehrheit alle Vogelarten bezeichnet, die des Fliegens mächtig sind, sieht die Sache aber anders aus. Sollte der Strauß auch dann immer noch die einzige in dem Netz vorkommende Vogelart sein, die nicht fliegen kann, dann braucht man, wenn man so wie in (47) verfährt, immer noch nur zwei Einträge für "kann fliegen". Würde man aber auch in diesem Fall ohne Überschreibung verfahren, wäre "das Merkmal "kann fliegen" einzeln bei jeder der zusätzlichen Vogelarten einzutragen. Es war Quillian's These, daß in solchen Fällen die Kodierungsmethode, die von Überschreibng gebrauch macht nicht nur für maschinellen Verarbeitung sehr viel effizient ist als eine, die auf Überschreibung verzichtet, sondern daß auch das menschliche Gedächtnis in solchen Fällen wohl von Überschreibungsstrategien Gebrauch macht.

Wichtig bei solchen Überlegungen ist, daß Überschreibung bei *information retrieval* (also bei der Extraktion aus menschlichen oder rechnerbasierten Datenbanken) keine Nachteile zur Folge hat. Die bisher entwickelten Inferenzmaschinen für Konzepthierarchien mit Überschreibung sind ein Hinweis, daß es solche Nachteile in der Tat nicht gibt. Denn diese Infernzmaschinen sind kaum weniger effizient als diejenigen, die für Hierarchien ohne Überschreibungsmöglichkeit entwickelt wurden.

(5) Der Älteste ist nicht immer der Klügste

(5') $\neg (\forall x)((\forall y)(y \neq x \rightarrow A(x,y)) \rightarrow ((\forall y)(y \neq x \rightarrow K(x,y)))$

Kommentar: Strikt gesprochen erfaßt diese Übersetzung die Bedeutung des deutschen Satzes nicht ganz korrekt. Genauer: sie wird der Rolle des Wortes *immer* nicht völlig gerecht. Das Problem ist folgendes. In der Prädikatenlogik, wie sie uns im Augenblick zur Verfügung steht, lassen sich Nominalphrasen wie *der Alteste* und *der Klüsgte* nicht direkt - d.h. als Terme, die Objekte bezeichnen - repräsentieren. Deswegen müssen wir das, was diese Nominalphrasen zur Bedeutung des gesamten Satzes beitragen, auf andere Weise zu erfassen versuchen. Die hier verwendete Formel, die dem Wortlaut des deutschen Satzes (5) noch am nächsten kommt, tut dies, indem sie von der Annahme Gebrauch macht, daß wenn x der Älteste ist, x älter ist als alle von ihm verschiedene Individuen ist, und analog für *der Klügste*. Unter dieser Annahme läßt sich der Satz (5) paraphrasieren als "Es ist nicht der Fall, daß für jedes x, das älter als alle anderen Individuen ist, gilt, daß x auch klüger als alle anderen ist." Die hier vorgeschlagene Formalisierung istt eine direkte übersetzung dieser Paraphrase.

In dieser Übersetzung haben wir das Wort *immer* ganz unterschlagen. Der intuitive Beitrag von *immer* in (5) ist, daß nicht in jeder Situation, in der es einen Ältesten und auch einen Klügsten gibt, diese einunddieselbe Person sind. Um dieser Intuition gerecht zu werden, müßten wir die Rolle der Situation explizit machen. Die wohl natürlichste Art, dies zu ereichen, ist davon auszugehen, daß es in jeder Situation s eine gewisse Menge $U_S$ von Individuen gibt, und daß z.B in s der Älteste das Element von $U_S$ ist, das älter ist als alle andere Elemente von $U_S$. Wir brauchen dann ein weiteres zweistelliges Prädikat E, das die "Element"-Beziehung ausdrückt - E(x,y) besagt, daß x Element der Individuenmenge von der Situation y ist. Mit Hilfe dieses Prädikats läßt sich (5) korrekt als (5') darstellen:

(5') $$\neg (\forall s)(\forall x)(E(x,s) \ \& \ (\forall y)((E(y,s) \ \& \ y \neq x) \rightarrow A(x,y,s)) \rightarrow (\forall y)((E(x,s) \ \& \ y \neq x) \rightarrow K(x,y)))$$

(9) Der weniger kluge von zwei Studenten ist nicht immer älter als der klügere.

## Ordnungen und Äquivalenzbeziehungen.

In diesem Abschnitt definieren wir zwei in Anwendungen der Logik oft vorkommenden Typen von zweitstelligen Relationen, den Ordnnungne und den Äquivalenzbeziehungen. Zuerst die Ordnungen. Von diesen gibt es mehrere Typen, die wir voneinander unterscheiden müssen.

Die Ordnungsrelationen lassen sich erstens in *schwache* und *starke* Ordnungen unterteilen. Beispiele von schwachen Ordnungen sind die Beziehung *kleiner oder gleich* zwischen Zahlen, die Beziehung *wiegt mindestens soviel wie* zwischen Körpern oder die Inklusionsbeziehung $\subseteq$ zwischen Mengen. Entsprechende Beispiele von starken Ordnungen sind die Beziehung *kleiner als* zwischen Zahlen, die Beziehung *wiegt mehr* zwischen Körpern und die echte Teilmengenbeziehung zwischen Mengen. Wie diese Beispiele suggerieren, sind schwache Ordnungen immer reflexiv, die starken dagegen irreflexiv (auf ihren Definitionsbereichen). Überdies sind sowohl die schwachen und die starken Ordnungen antisymmetrsch und transitiv.

Es gibt noch einen weiteren Unterschied, den wir sowohl innerhalb der schwachen als auch der starken Ordnungen finden. Die Ordnungsbeziehungen *kleiner oder gleich* und *kleiner als* sind beide *vollständig*- oder auch *linear* - indem sie die Eigenschaft des schwachen Zusammenhängens besitzen: für jede zwei voneinander verschiedene Objekte aus dem Definitionsbereich gilt die Beziehung entweder in der einen oder in der anderen Richtung. Die vier anderen Beispiele haben diese Eigenschaft nicht. Sie werden demnach partielle Ordnungen genannt.

Somit haben wir schon gleich 4 verschiedene Ordnungstypen: die schwachen partiellen Ordnungen, die schwachen linearen Ordnungen, die starken partiellen Ordnungen und die starken linearen Ordnungen. es folgen de Definitionen:

Def. 9 (Ordnungsrelationen)

Im folgenden sei R immer eine Relation zwischen Elementen einer Menge U - $R \subseteq U \otimes U$

1. R ist eine *schwache partielle Ordnung auf* U gdw

(i) R ist reflexiv auf U
(ii) R ist antisymmetrisch auf U

(iii) R ist transitiv auf U

2. R ist eine *schwache vollständige* (oder *lieare) Ordnung auf* U gdw

   (i) R ist reflexiv auf U
   (ii) R ist antisymmetrisch auf U
   (iii) R ist transitiv auf U
   (iv) R ist schwach zusammenhängend auf U

3. R ist eine *starke partielle Ordnung auf* U gdw

   (i) R ist irreflexiv auf U
   (ii) R ist antisymmetrisch auf U
   (iii) R ist transitiv auf U

4. R ist eine *starke vollständige* (oder *lieare) Ordnung auf* U gdw

   (i) R ist irreflexiv auf U
   (ii) R ist antisymmetrisch auf U
   (iii) R ist transitiv auf U
   (iv) R ist schwach zusammenhängend auf U

N.B. Nach diesen Definitionen bilden die (schwachen bzw. starken) linearen Ordnungen einen Untertyp der (schwachen bzw. starken) partiellen Ordnungen: jede lineare Ordnung ist zugleich auch eine partielle Ordnung. Diese Verwendung von "partiell" widerspricht der Intuition, daß partielle Ordnungen immer NICHT linear seien. Sie ist aber die in der Logik üblichere und wir schließen uns ihr an.

Die Wahl unserer Beispiele suggeriert, daß es einen systematischen Bezug zwischen schwachen und starken Ordnungen gibt. In der Tat läßt sich zu jeder schwachen Ordnungsbeziehung eine entsprechende starke Ordnung konstruieren und umgekehrt:

Die Aufnahme von 3- und mehrstelligen Prädikaten in den Prädikatenkalkül ist ebensowenig problematisch wie die Aufnahme 2-stelliger Prädikate. Nur gibt es ein kleines Problem bei der Erweiterung der Modelltheorie. Betrachten wir zum Beispiel ein dreistelliges Prädikat R. Seine Interpretation $I_M(R)$ im Modell M soll explizit machen genau welche Kombinationen a,b,c von Elementen aus R erfüllen (in dieser Reihenfolge), dazu bauchen wir die Menge aller geordneten 3-Tupel <a,b,c>. Aber was ist ein 3-Tupel? Allgemeiner: was ist ein n-Tupel, für n > 2?

Es gibt zwei Methoden, n-Tupel zu definieren. Die aus theoretischen Gründen präferable Methode definiert n-Tupel als Funktionen, deren Argumentbereich die Menge der ersten n positiven ganzen Zahlen, {1, ..., n}, ist. Solche Funktionen lassen sich natürlich als $<a_1,..., a_n>$ darstellen. $a_i$, für $i \leq n$, ist dann der Wert, den die Funktion dem "Index" i zuordnet und damit die i-te Komponente des Tupels. So lange wir die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... ohne weitere Begründung als vorgegeben akzeptieren, liefert diese Definition genau das, was wir wollen. Die Definition erlaubt uns überdies, den Begriff eines n-Tupels auch auf die Fälle n = 2 und n =1 zu erweitern: Die 2-Tupel sind nun Funktionen, deren Domäne das ungeordnete Paar {1,2} ist, und die 1-Tupel Funktionen, deren Domäne nur aus der Zahl 1 besteht. Ein Beispiel wäre das 1-Tupel {<1,a>}, dessen einzige Komponente das Objekt a ist.

Es ist aber eine heutzutage weitverbreitete Auffassung innerhalb der Grundlagen der Mathematik, daß man nicht ohne weiteres von der Existenz der natürlichen Zahlen ausgehen darf und daß diese einer mengentheoretischen Begründung bedürfen. Diese Begründung gibt es in der Tat aber sie hier an diesem Punkt durchzuführen, wäre sehr umständlich. Was den Begriff eines n-Tupels betrifft, so läßt sich dieses Problem umgehen, da es auch eine andere Definition gibt, die von den Zahlen als Elemente der zu definierenden Objekte (also. der n-Tupel) keinen Gebrauch macht. nach dieser zweiten Methode definiert man 3-Tupel <a,b,c> als Paare von der Form <<a,b>,c>, dann 4-Tupel als Paare die aus einem 3-Tupel und einem weiteren Element bestehen, usw. für n = 5, 6, ... . Diese Definition hat den bescheidenen Nachteil, daß n-Tupel mit n > 2 gleichzeitig auch geordnete Paare, also "2-Tupel", sind, doch für unsere Zwecke ist dies unbedeutend. Hilfreich ist es allerdings den Bereich, zu dem die Komponenten der Tupel gehören sollen in der definition mitzuberücksichtigen.

Wir geben vollständigkeitshalber beide Definitionen, werden uns aber im Weiteren auf die zweite beziehen.

Def. 5 (Definitionen vom Begriff n-*Tupel*:)

Def. 5.a Ein n-*Tupel* ist eine Funktion, deren Domäne die Menge $\{1, 2, ..., n\}$ der ersten n positiven ganzen Zahlen ist. (In der Notation $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ ist nach dieser Definition, $a_i$, die i-te Komponente des Tupels, der Wert, den das Tupel dem "Index" i zuordnet.)

Def. 5.b (i) Ein 2-*Tupel* (*von Elementen aus* der Menge U) ist ein geordnetes Paar (von Elementen aus U).

(ii) Sei $n \geq 2$. Ein n+1-Tupel (*von Elementen aus* U) ist ein geordnetes Paar $\langle x,a \rangle$, in dem x ein n-Tupel von Elementen aus U und a ein Element aus U.

<u>Thm. 1</u> 1. Sei R eine schwache (lineare) Ordnung auf U und sei S die durch (1) gegebene Relation:

(1) . Für alle a, b gilt: <a,b> ε S gdw <a,b> ε R und a ≠ b

Dann ist S eine starke (lineare) Ordnung auf U.

2. Sei S eine starke (lineare) Ordnung auf U und sei R die durch (2) gegebene Relation:

(2) . Für alle a, b gilt: <a,b> ε R gdw <a,b> ε R oder ( a, b ε U und a = b)

Dann ist R eine schwache (lineare) Ordnung auf U. Überdies gewinnt man, indem man auf dieses R die Definition (1) anwendet, die Ausgangsbetziehung S von 2. wieder.

<u>Beweis</u>: Übung.

Weil die Konversion von schwachen in starke und von starken in schwache Ordnungen nach den Rezepten von (1) und (2) so besonders einfach ist, geht man in der Praxis im allgmeinen mühelos zwischen diesen Relationstypen hin und her. Dabei macht man oft von dem notationellen Hilfsmittel gebrauch, die schwache Beziehung durch ≤ (bzw. ≥) und die entsprechende starke Beziehung durch < (bzw. >) darzustellen. Die durch diese Symbolen bezeichneten Beziehungen werden dann immer als über (1) und (2) miteinander verknüpft verstanden.

Die Symbole < und > (bzw. ≤ und. ≥) suggerieren noch einen anderen einfachen Zusammenhang zwischen Ordnungsrelationen. Normalerweise verstehen wir unter der durch ">" ja die Konverse von der Relation, die"<" bezeichnet (und genauso für ≥ und ≤). In der Tat gilt, daß die Konverse R einer Ordnungsrelation R immer auch wieder eine ordnungsrelation ist, un zwar vom selben Subtyp wie R. das folgende Theorem faßt die relevanten fakten zusammen

<u>Thm 2.</u> Sei R eine schwache/starke (lineare) Ordnung auf U. Dann ist R ebenfalls schwache/starke (lineare) Ordnung auf U.

Die Definitionen der Eigenschaften von Ordnungsrelationen (sowie vieler anderer Eigenschaften von 2- und mehr-stelligen Relationen) lassen sich genauso wie viele andere Sätze aus der Mathematik innerhalb der Prädikatenlogik formalisieren. (Im Wesentlichen hatten die bisher verwendeten definitonen schon die entsprechende Form.) Wir wollen die Idee einer solchen formal-logischen Spezifizierung solcher Eigenschaften jetzt völlig explizit machen. Damit kommen wir zur ersten Anwendung der oben eingeführten Begriffe von einer prädikatenlogischer Sprache und von einer Theorie.

Als Sprache wählen wir eine, deren logisches Vokalbular aus den 5 zweistelligen Prädikaten besteht: $L_o$ sei die Sprache $\{<, >, \geq, \leq, \equiv\}$, wobei die aufgelisteten Prädikate alle 2-stellig sind. Die oben definierten Relationstypen können wir jetzt mittels Theorien von $L_o$ charakterisieren, die die Eigenschaften, welche diese Typen bestimmen, definieren. Als Beispiel betrachten wir die Theorie der schwachen linearen Ordnungen, $T_{wl}$.

$T_{wl}1.$ $(\forall x)\ x \leq x$

$T_{wl}2.$ $(\forall x)(\forall y)((x \leq y \ \&\ x \neq y) \rightarrow \neg\ y \leq x)$

$T_{wl}3.$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \leq y \ \&\ y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

$T_{wl}4.$ $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \ v\ x \neq y)$

Sei M ein Modell für $L_o$. Dann gilt:

$M \models T_{wl}$ gdw $I_M(\leq)$ eine schwache linare Ordnung von $U_M$ ist.

<u>Beweis</u>: Die Axiome von $T_{wl}$ sagen ja, daß $\leq$ die Eigenschaften einer schwachen linearen Ordnung auf dem betreffenden Diskursuniversum hat. Sind die Axiome in M erfüllt, dann bedeutet das, daß die Interpretation von $\leq$ in M diese Eigenschaften besitzt, und umgekehrt.

Diese Beziehung zwischen einer Theorie T, die die Eigenschaften eines Relationstyps beschreibt und die Interpretation der in T erwähnten Relation in den Modellen, in denen T gilt, ist natürlich eine ganz allgemeine. Z.B. können wir die Theorie $T_{sp}$ bilden, die sagt, daß > eine starke partielle Ordnung ist. Dann wird in den Modellen M, die $T_{sp}$ verifizieren, $I_M(>)$ immer eine starke partielle Ordnung sein; usw.

## Äquivalenzbeziehungen.

Def. 10. Sei R eine Relation auf U. R ist eine Äquivalenzbeziehung auf U gdw.

(i) R ist reflexiv auf U
(ii) R ist symmetrisch auf U
(iii) R ist transitiv auf U.

Äquivalenzbeziehungen können als Relationen verstanden werden, die genau dann zwischen zwei Objekten bestehen, wenn diese Objekte in einer bestimmten Hinsicht ähnlich (also: "äquivalent") sind. Typische Beispiele sind: "a und b haben dieselbe Farbe", "a und b sind gleich groß", "a wiegt genau so viel wie b", " a und b haben dieselben Bekannten", usw. Diese intuitive Deutung als Ähnlichkeitsbeziehungen widerspiegelt sich in den formalen Eigenschaften von Äquivalenzbeziehungen. Zentral ist dabei die Beobachtung, daß jede Äquivalenzbeziehung R auf einer Menge U eine sog. *Partition von* U in Teilmengen erzeugt. Diese Teilmengen entsprechen dem, was bestimmte Objekte aus U, die in der Beziehung R zueinander stehen, gemeinsam haben. Ist z.B. R die Beziehung "haben dieselbne Bekannten" os wird jede der erzeugten Teilmengen einem bestimmten Bekanntenkreis entsprechen: sie enthält all die Individuen, deren Bekannte genau diejenigen sind, die diesem Bekanntenkreis angehören; ist R die Beziehung "wiegt soviel wie", dan entspricht jede Teilmenge einem bestimmten Gewicht, dem Gewicht aller Objekte in dieser Menge, und so fort.

Die Erzeugung der Teilmengen von U erfolgt so: Sei u ein willkürliches Element von U. Unter $[u]_R$ verstehen wir die Menge $\{v: uRv\}$ aller Elemente, zu denen u in der Beziehung R steht. $[u]_R$ wird die *durch* R *aus* u *erzeugte Äquivalenzklasse* oder auch die *von* u *erzeugte Äquivalenzklasse bzgl.* R genannt. Seien $[u_1]_R$ und $[u_2]_R$ zwei solche Äquivalenzklassen. Dann gilt: entweder (i) $[u_1]_R = [u_2]_R$ , oder (ii) $[u_1]_R \cap [u_2]_R = \emptyset$.

Beweis: Betrachten wir $u_1$ und $[u_2]_R$. Es gilt entweder $u_1 \in [u_2]_R$ oder $\neg(u_1 \in [u_2]_R)$. Im ersteren Fall haben wir $u_1Ru_2$. Sei nun v irgendein Element von $[u_2]_R$. Dann gilt $u_2Rv$ und so wegen der Transitivität von R, $u_1Rv$. Also $v \in [u_1]_R$ und da v willkurlich gewählt war, $[u_2]_R \subseteq [u_1]_R$. Sei nun umgekehrt v ein willkürliches Element von

$[u_1]_R$. Dann $u_1Rv$. Da $u_1Ru_2$, gilt wegen Symmetrie von R auch $u_2Ru_1$ und so wegen Transitivität von R $u_2Rv$. Wiederum folgt daraus wegen der willkürlichen Wahl von v, daß $[u_1]_R \subseteq [u_2]_R$. Also $[u_1]_R = [u_2]_R$. Dies beschließt den Fall (i). Sei nun $\neg(u_1 \varepsilon [u_2]_R)$. Nimm an, daß v $\varepsilon$ $[u_1]_R \cap [u_2]_R$. Dann gilt also sowohl $u_1Rv$ als auch $u_2Rv$. Wiederum schließen wir aufgrund der Symmterie von R, daß $vRu_1$ und wegen der Transitivität, daß $u_2Ru_1$; das heißt alo, daß $u_1 \varepsilon [u_2]_R$, was der Annahme, daß $\neg(u_1 \varepsilon [u_2]_R)$ widerspricht. Also ist die Annahme, daß v $\varepsilon$ $[u_1]_R \cap [u_2]_R$ falsch, d.h. $[u_1]_R \cap [u_2]_R = \varnothing$.

(Übung)

Unser erstes Theorem faßt zwei Fakten zusammen, die sich auf die Beziehung zwischen partiellen Ordnungen und von ihr abgeleiteten Äquivalenzbeziehungen bestehen.

<u>Thm. 64</u> 1. Sei $\leq$ eine schwache partielle Ordnung auf U und sei $S_{\leq}$ die wie folgt definierte Relation:

(1) Für alle u, v $\varepsilon$ U gilt: uSv gdw. $u \leq v$ & $v \leq u$.

Dann ist $S_{\leq}$ die Identität auf U (und somit eine Äquivalenzbeziehung auf U).

2. Sei < eine starke lineare Ordnung auf U und sei $S'_{<}$ folgendermaßen definiert:

(2) Für alle u, v gilt: $uS'_{<}v$ gdw. $\neg (u < v)$ & $\neg (v < u)$

Dann ist $S'_{<}$ die Identität auf U.

<u>Beweis</u>: Übung