EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK — TEIL II: BEWEISSYSTEME

HANS KAMP

INHALTSVERZEICHNIS

1. Das Konzept des „logischen Beweisverfahrens“

Im ersten Teil dieses Kurses haben wir verschiedene logische Kunstsprachen eingeführt:

- die Ausagenlogik
- die monadische Prädikatenlogik
- die polyadische Prädikatenlogik ohne Identität und Funktionskonstanten

und

- die polyadische Prädikatenlogik mit Identität und/oder Funktionskonstanten.

Für jede dieser Sprachen haben wir eine Syntax definiert, die bestimmt, welche Symbolreihen wohlgeformte Ausdrücke der Sprache sind und wie diese schrittweise aus kleinsten Konstituenten aufgebaut sind. Ebenfalls wurde, aufbauend auf der Syntax der verschiedenen Sprachen L, jeweils eine modelltheoretische Semantik entwickelt. Diese spezifiziert eine Klasse von Modellen für L und definiert für ein jedes solche Modell M, welche Sätze von L in M wahr sind und welche falsch. Damit ergeben sich für jeden

Satz A von L die *Wahrheitsbedingungen* von A, die jedem Modell M für L den Wert „w(ahr)“ bzw. „f(alsch)“ zuordnen, abhängig davon, ob A in M wahr ist oder nicht. Auf dieser semantischen Basis wurde dann die Gültigkeit von Argumenten definiert: Ein Argument $A_1,\dots,A_n \models B$, mit Prämissen $A_1,\dots,A_n$ und Schluß B, ist gültig, wenn das Wahr-Sein der Prämissen eine Garantie bildet für das Wahr-Sein des Schlusses: In jedem Modell, in dem $A_1,\dots,A_n$ wahr sind, ist auch B wahr.

Noch kaum berücksichtigt haben wir bis jetzt die Frage, wie *festgestellt* werden kann, *ob* ein Satz B in der Tat aus Prämissen $A_1,\dots,A_n$ folgt. Und noch überhaupt nicht erörtert wurde die Frage, wie man einen Schluß B aus den Prämissen $A_1,\dots,A_n$ ableiten könnte. Diese Fragen werden uns in diesem Teil des Kurses beschäftigen.

2. Semantische Tableaus

2.1. **Aussagenkalkül.** Für die Aussagenlogik sind wir einem Beweisverfahren — einem Verfahren, das in endlich vielen Schritten feststellt, ob der Satz B logisch aus den Prämissensätzen $A_1,\dots,A_n$ folgt — schon begegnet. Denn die Methode der Wahrheitstafeln ist ja ein solches Verfahren: Indem man alle Kombinationen von Wahrheitswerten für die in Prämissen und Schluß vorkommenden Atome betrachtet und für jede dieser Kombinationen die entsprechenden Wahrheitswerte für $A_1,\dots,A_n$ und B berechnet, läßt sich immer entscheiden, ob B in der Tat aus $A_1,\dots,A_n$ folgt. Ist der Wert von B „wahr“ für jede Kombination, die allen Prämissen $A_1,\dots,A_n$ den Wert „wahr“ zuordnet, so folgt B aus $A_1,\dots,A_n$; und wenn nicht, dann folgt B nicht aus diesen Prämissen.

Man kann dieses Verfahren auch so beschreiben: Man führt eine systematische Suche nach einem Gegenbeispiel für die mutmaßliche Folgerungsbeziehung zwischen $A_1,\dots,A_n$ und B durch — die Suche nach einer möglichen Kombination von Wahrheitswerten für die atomaren Teilsätze von $A_1,\dots,A_n$ und B, die die Prämissen verifiziert und den Schluß falsifiziert. Hat die Suche Erfolg, so bedeutet dies, daß die Folgerungsbeziehung zwischen $A_1,\dots,A_n$ und B nicht gilt. Hat sie keinen Erfolg, so legt dies nahe, daß der Schluß gültig ist; unter gewissen Umständen zeigt der Versuch, ein Gegenbeispiel zu finden, eindeutig, daß es kein Gegenbeispiel geben *kann*. In solchen Fällen können wir schließen, daß B logisch aus $A_1,\dots,A_n$ folgt.

Das Wahrheitstafelverfahren erlaubt diesen Schluß in allen Fällen, wo sich kein Gegenbeispiel konstruieren läßt. Wenn wir für jede der möglichen Wahrheitswert-Kombinationen für die Atome, die in Prämissen und Schluß vorkommen, die Wahrheitswerte von Prämissen und Schluß ausrechnen, dann wird sich entweder eine Kombination finden, die alle Prämissen wahr und den Schluß falsch macht — in diesem Fall haben wir ein Gegenbeispiel — oder sonst gilt für jede Kombination, daß sie entweder den Schluß verifiziert oder eine der Prämissen falsifiziert; und damit ist dann nachgewiesen, daß es kein Gegenbeispiel gibt. Das Verfahren kommt also immer nach einer endlichen Anzahl von Berechnungsschritten zu einem Ergebnis und deshalb ist es ein sogenanntes *Entscheidungsverfahren:* Jede mögliche Frage von der Form „Ist das Argument $A, \ldots, A_n \vDash B$ gültig?“ beantwortet das Verfahren nach endlich vielen Schritten entweder mit „ja“ oder mit „nein“.

Auch für die Prädikatenlogik gibt es Beweisverfahren, die in der Lage sind, für jedes gültige Argument $A_1, \ldots, A_n \vDash B$ einen Gültigkeitsbeweis zu liefern. Beweisverfahren für die *polyadische* Prädikatenlogik sind aber nie Entscheidungsverfahren. (Für die monadische Prädikatenlogik, in der wir es ausschließlich mit einstelligen Prädikaten und Individuenkonstanten zu tun haben, gibt es dagegen Entscheidungsverfahren.) Der Umstand, daß es *vollständige* Beweisverfahren für den (polyadischen) Prädikatenkalkül gibt (d. h. Verfahren, die für jedes gültige Argument einen Beweis im Prinzip bereitstellen), die aber keine Entscheidungsverfahren sind, mag auf den ersten Blick befremden. Daß diese Möglichkeit — vollständig und dennoch kein Entscheidungsverfahren — besteht, hat folgenden Grund: Wie lang ein Beweis der Gültigkeit eines beliebig gewählten Arguments sein wird, läßt sich (prinzipiell) nicht voraussagen. Weiß man also nicht von vornherein, ob das Argument gültig ist, dann bleibt einem nichts Besseres übrig, als zu versuchen, mit Hilfe des Verfahrens einen Beweis zu finden. Gelingt dies, so hat man damit die Gültigkeit nachgewiesen; solange man aber keinen Beweis gefunden hat, läßt sich im allgemeinen nichts mit Sicherheit über die Gültigkeit des Arguments sagen: Es könnte ungültig sein, und in dem Fall gibt es dann natürlich auch keinen Beweis; aber die Möglichkeit, daß das Argument gültig ist und ein Beweis gefunden werden könnte, wenn man die Suche nach ihm fortsetzen würde, läßt sich ebenfalls nicht ausschließen.

Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik ist nicht nur eines der tiefsten und grundlegendsten Ergebnisse der formalen Logik und der Mathematik, sondern der westlichen Kultur überhaupt. In seiner Essenz ist es den bahnbrechenden Arbeiten aus den Jahren 1929–31 des tschechisch-österreichischen Logikers Kurt Gödel (1906–1981) zu verdanken.

Um die logische Gültigkeit eines Arguments in der Aussagenlogik zu verifizieren, ist es, wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, nicht immer nötig, seine Wahrheitstafel lückenlos zu erstellen. Oft ist es möglich, diese Frage zu entscheiden, indem man nur eine bestimmte Auswahl aller Bewertungen (Kombinationen von Wahrheitswerten) betrachtet. Hat man die Wahrheitswerte von Prämissen und Schluß für diese Bewertungen durchgerechnet, dann ist damit die Antwort auf die Gültigkeitsfrage schon gegeben. Zur Illustration betrachten wir nochmal das schon früher diskutierte Argument (1):

(1)

$$\neg(p \wedge (q \vee r)), (q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r) \vDash \neg(r \wedge q)$$

Frage: Ist dieses Argument logisch gültig?

Diese Frage läßt sich folgendermaßen beantworten: Wäre das Argument (1) nicht gültig, so müßte es eine Bewertung geben, die den Schluß $\neg(r \wedge q)$ falsifiziert. Dazu muß $r \wedge q$ wahr sein, was bedeutet, daß sowohl r als auch q wahr sein müssen. Damit sind die Möglichkeiten eines eventuellen Gegenbeispiels schon auf zwei reduziert: q und r wahr und weiterhin entweder p wahr oder p falsch. Ist p falsch, dann ist auch $p \wedge r$ falsch, während aufgrund der schon gemachten Annahmen $q \wedge r$ wahr sein muß. Damit ist dann aber die zweite Prämisse falsch. Also bekommen wir auf diese Weise kein Gegenbeispiel. Wenn aber p wahr ist, so ist auch $p \wedge (q \vee r)$ wahr, und daher $\neg(p \wedge (q \vee r))$ falsch. Also ergibt sich auch auf diesem Weg kein Gegenbeispiel. Es gibt also keine Bewertung, die die Prämissen verifiziert und gleichzeitig den Schluß falsifiziert. Also ist das Argument gültig.

Die Idee der gerade beschriebenen Überlegung war diese: Die Bedingungen, die ein Gegenbeispiel für das Argument erfüllen sollte — die Prämissen sollen wahr sein und der Schluß falsch — werden schrittweise auf entsprechende Bedingungen für ihre Teilformeln reduziert, bis man zuletzt solche Bedingungen für die atomaren Teilformeln erreicht hat. In dem Fall, wo es ein Gegenbeispiel gibt, werden diese Bedingungen eines hergeben; im anderen Fall, in dem es keine Gegenbeispiele gibt, wird dies, wie im gerade diskutierten Fll, unmittelbar ersichtlich sein, wie sich die Bedingungen eindeutig widersprechen.

Wenn wir diese Idee systematisch ausarbeiten, ergibt sich eine Methode zur Prüfung der Gültigkeit von Argumenten, die meistens sehr viel schneller zum Ziel führt als die umständliche Methode der Wahrheitstafeln. Diese Methode wurde in den späten fünfziger Jahren fast gleichzeitig von dem niederländischen Logiker Evert W. Beth und (in etwas anderer Form) von dem finnischen Logiker und Philosophen Jaakko Hintikka entwickelt. Sie ist jetzt allgemein als die Methode der *semantischen Tableaus* bekannt. Wie die Methode genau funktioniert, läßt sich am besten anhand einiger Beispiele zeigen. Als erstes Beispiel betrachten wir nochmal das Argument (1), auf das wir jetzt die Tableau-Methode anwenden.

Als ersten Schritt in der Konstruktion des semantischen Tableaus für (1) führen wir zwei *Spalten* ein — eine Spalte für „wahre“ und eine für „falsche“ Formeln. Und wir tragen die Prämissen in die erste und den Schluß in die zweite Spalte ein. Die Idee, die dahinter steckt, ist zu versuchen, eine Bewertung für die im Argument vorkommenden Atome p, q und r zu finden, die die Formeln in der „wahr“-Spalte wahr macht und die in der „falsch“-Spalte falsch. Das Anfangstableau (2) ist also nichts weiter als eine graphische Darstellung der Frage: Gibt es eine solche Bewertung? (Wenn ja, dann ist das Argument ungültig, wenn nicht, dann ist es gültig.)

(2)

wahr	**falsch**
$\neg(p \wedge (q \vee r))$	$\neg(r \wedge q)$
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$	

Die mit den Formeln, die in (2) unter „wahr“ und „falsch“ vorkommen, verbundenen Bedingungen — „$\neg(p \wedge (q \vee r))$“ ist „wahr“ usw. — müssen jetzt weiteranalysiert werden. Wir tun dies, indem wir die Formeln in ihre Teile zerlegen: Die Formeln werden schrittweise „reduziert“. Die ersten beiden Reduktionsschritte, die wir im vorliegenden Fall durchführen, entsprechen den ersten beiden der Überlegungen, die auf S. 4 f.

zu dem Schluß führten, daß (1) gültig ist. Zuerst reduzieren wir die Forderung, daß $\neg(r \wedge q)$ falsch sein soll, auf die Forderung, daß $r \wedge q$ wahr sein soll. Dazu tragen wir die Formel $r \wedge q$ in die „wahr“-Spalte ein:

(3)

wahr	**falsch**
$\neg(p \wedge (q \vee r))$	$\neg(r \wedge q)$
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$	
$r \wedge q$	

Als nächsten Schritt reduzieren wir die Bedingung, daß $r \wedge q$ wahr ist, auf die zwei Bedingungen, daß r wahr bzw. daß q wahr ist. Dazu tragen wir auch diese beiden Teilformeln unter „wahr“ ein:

(4)

wahr	**falsch**
$\neg(p \wedge (q \vee r))$	$\neg(r \wedge q)$
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$	
$r \wedge q$	
r	
q	

Der dritte Schritt reduziert die Bedingung, daß $\neg(p \wedge (q \vee r))$ wahr sein soll, auf die Bedingung, daß $p \wedge (q \vee r)$ falsch sein soll: $p \wedge (q \vee r)$ kommt in die „falsch“-Spalte.

(5)

wahr	**falsch**
$\neg(p \wedge (q \vee r))$	$\neg(r \wedge q)$
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$	
$r \wedge q$	
r	
q	
	$p \wedge (q \vee r)$

Jetzt wird die Prozedur etwas komplizierter, weil die einzigen noch möglichen Reduktionsschritte alle zu „Alternativen“ führen. Zum Beispiel ist die Forderung, daß $p \wedge (q \vee r)$ falsch ist, entweder dadurch erfüllbar, daß p falsch ist, oder dadurch, daß $q \vee r$ falsch ist. Dies bedeutet, daß wir diese beiden Möglichkeiten separat untersuchen müssen. Das Tableau teilt sich also in zwei Tableaus, eines mit den zusätzlichen Bedingung des Falsch-Seins von p und das andere mit der Bedingung des Falsch-Seins von $q \vee r$. Wir stellen diese Tableauteilung mit Hilfe einer senkrechten Trennung der beiden Spalten dar:

(6)

wahr		**falsch**	
$\neg(p \wedge (q \vee r))$		$\neg(r \wedge q)$	
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$			
$r \wedge q$			
r			
q			
		$p \wedge (q \vee r)$	
		p	$q \vee r$
Ast 1	**Ast 2**	**Ast 1**	**Ast 2**

Die zwei so entstandenen Tableaus — das erste besteht aus der linken „wahr“-Spalte und der linken „falsch“-Spalte, das zweite aus der rechten

„wahr"-Spalte und der rechten „falsch"-Spalte — werden auch *Tableau-Äste* (*des* Ausgangstableaus) genannt.

Der nächste Schritt ist wiederum von der einfachen Sorte; sie führt nicht zu einer Verzweigung. Das Falsch-Sein von $q \vee r$ erfordert, daß q und r beide falsch sind. Also können wir diese beiden Formeln in die „falsch"-Spalte des zweiten Tableaus eintragen. Und jetzt zeigt sich, daß dieses Tableau nicht zu einem Gegenbeispiel führen kann. Denn die atomare Formel q (und dasselbe gilt für r) befindet sich in diesem Tableau sowohl auf der linken Seite — d. h. der auf der „wahr"-Seite — als auch auf der rechten — d. h. der auf der „falsch"-Seite. Das bedeutet, daß die Suche in diesem Tableau-Ast zu widersprüchlichen Anforderungen geführt hat; q kann ja nicht gleichzeitig wahr und falsch sein. Wir können aufgrund dieses Befundes schließen, daß der erste Tableau-Ast nicht zu einem Gegenbeispiel fürt. Einen solchen Tableau-Ast nennt man *geschlossen*; wir markieren ihn als solchen, indem wir seine beiden Spalten mit einem waagerechten fetten Strich abschließen:

(7)

<table>
<tr><th colspan="2">wahr</th><th colspan="2">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg(p \wedge (q \vee r))$
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$
$r \wedge q$
r
q</td><td colspan="2">$\neg(r \wedge q)$

$p \wedge (q \vee r)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>p</td><td>$q \vee r$
q
r</td></tr>
<tr><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2**</td><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2**</td></tr>
</table>

Jetzt muß wieder eine Redutkion durchgeführt werden, die zu einer Spaltung führt (und zwar einer Spaltung des noch nicht abgeschlossenen linken Tableau-Astes). Die Bedingung, daß das Konditional $(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$ wahr ist, ist entweder dadurch erfüllbar, daß das Antezedens falsch ist, oder dadurch daß das Konsequens wahr ist. Von den zwei Tableau-Ästen, die diesen Möglichkeiten entsprechen, läßt sich der zweite gleich mit der Regel, die

wir schon auf die Konjunktion $r \wedge q$ angewandt haben, weiter reduzieren. Da in diesem Ast p auch auf der rechten Seite vorkommt, ist er ebenfalls abgeschlossen. (8) zeigt das Ergebnis der beiden Schritte.

(8)

<table>
<tr><th colspan="3">wahr</th><th colspan="3">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="3">$\neg(p \wedge (q \vee r))$
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$
$r \wedge q$
r
q</td><td colspan="3">$\neg(r \wedge q)$

$p \wedge (q \vee r)$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">p</td><td rowspan="2">$q \vee r$
q
r</td></tr>
<tr><td></td><td>$p \wedge r$
p
r</td><td>$q \wedge r$</td><td></td></tr>
<tr><td>**Ast 1.1**</td><td>**Ast 1.2**</td><td>**Ast 2**</td><td>**Ast 1.1**</td><td>**Ast 1.2**</td><td>**Ast 2**</td></tr>
</table>

In dem ersten der gerade erzeugten Äste ist noch eine weitere Reduktion fällig, und zwar die der Formel $q \wedge r$. Diese Reduktion führt zu einer abermaligen Verzweigung (genauso wie vorhin die Formel $p \wedge (q \vee r)$. Da aber sowohl q als auch r in diesem Tableau schon auf der linken Seite vorkommen, kommen beide so entstehenden Tableau-Äste zum Abschluß.

(9)

<table>
<tr><th colspan="4">wahr</th><th colspan="4">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg(p \wedge (q \vee r))$
$(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r)$
$r \wedge q$
r
q</td><td colspan="4">$\neg(r \wedge q)$

$p \wedge (q \vee r)$</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td colspan="3">p</td><td rowspan="3">$q \vee r$
q
r</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td rowspan="2">$p \wedge r$
p
r</td><td colspan="2">$q \wedge r$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>q</td><td>r</td></tr>
<tr><td>**Ast 1.1.1**</td><td>**Ast 1.1.2**</td><td>**Ast 1.2**</td><td>**Ast 2**</td><td>**Ast 1.1.1**</td><td>**Ast 1.1.2**</td><td>**Ast 1.2**</td><td>**Ast 2**</td></tr>
</table>

Damit geht die Suche nach einem Gegenbeispiel endgültig zu Ende. Da alle Tableau-Äste, die im Laufe dieser Suche entstanden sind, abgeschlossen sind, kann es offenbar kein Gegenbeispiel geben und wir dürfen schließen, daß das Argument gültig ist.

Bei der Konstruktion des Tableaus haben wir von Regeln Gebrauch gemacht, die ganz von den jeweiligen Hauptjunktoren der zu reduzierenden Formeln bestimmt sind. Genauer: Für jeden Junktor gibt es zwei Regeln — die eine für die Reduktion von Formeln, die diesen Junktor als Hauptjunktor haben und in der „wahr"-Spalte vorkommen, und die andere für solche Formeln in der „falsch"-Spalte vorkommen. Zum Beispiel haben wir für die Konjunktion, „$\wedge$", die zwei Regeln, die sich folgendermaßen schematisch darstellen lassen:

<table>
<tr><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>$C \wedge D$</td><td></td></tr>
<tr><td>C
D</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>wahr</th><th colspan="2">falsch</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$C \wedge D$</td></tr>
<tr><td></td><td>C</td><td>D</td></tr>
</table>

Die Interpretation dieser Schemata sollte klar sein: Die Regel für Formeln von der Form $C \wedge D$ in der „falsch"-Spalte bewirkt eine Verzweigung des Tableaus; im ersten der so entstehenden Äste wird das Konjunkt C in die „falsch"-Spalte eingetragen, während im zweiten Ast das Konjunkt D unter „falsch" eingetragen wird.

Die Regeln für die anderen Junktoren lassen sich ähnlich darstellen:

<table>
<tr><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>$\neg C$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>C</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td></td><td>$\neg C$</td></tr>
<tr><td>C</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td colspan="2">$C \vee D$</td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>D</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td></td><td>$C \vee D$</td></tr>
<tr><td></td><td>C
D</td></tr>
</table>

wahr		**falsch**	
$C \to D$			
	D	C	

wahr	**falsch**
	$C \to D$
C	D

wahr		**falsch**	
$C \leftrightarrow D$			
C			C
D			D

wahr		**falsch**	
		$C \leftrightarrow D$	
C	D	D	C

Wir betrachten jetzt ein zweites Beispiel, in dem wir, wie auch weiterhin, die Junktorenregeln ohne Kommentar anwenden. Diesmal ist das Argument, für das wir ein Tableau konstruieren, nämlich

$$\neg(p \vee (q \wedge r)), (p \wedge r) \to (q \wedge r) \models \neg(r \vee q),$$

nicht gültig.

(10)

<table>
<tr><th colspan="4">wahr</th><th colspan="4">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg(p \vee (q \wedge r))$
$(p \wedge r) \to (q \wedge r)$
$r \vee q$</td><td colspan="4">$\neg(r \vee q)$

$p \vee (q \wedge r)$
p
$q \wedge r$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">q</td><td colspan="2">r</td></tr>
<tr><td>r</td><td>q</td><td>r</td><td>q</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ast 1.1</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td><td>Ast 1.1</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td></tr>
</table>

In (10) sind die erste Prämisse und der Schluß bis auf ihre Atome reduziert worden. Es gibt in diesem Tableau immer noch zwei nicht geschlossene Tableau-Äste, nämlich Ast 1.1 und Ast 2.2. Die Reduktion der zweiten Prämisse — d. h. die Reduktion von $(p \wedge r) \to (q \wedge r)$ — unterteilt jeden dieser beiden Äste noch einmal. Wir betrachten den Ast 1.1. Von den zwei Tableau-Ästen, die sich aus Ast 1.1 durch die Anwendung der „→“-Regel auf die Formel $(p \wedge r) \to (q \wedge r)$ ergeben, schließt sich der zweite, in dem $(q \wedge r)$ auf der „wahr“-Seite erscheint, wenn man diese Konjunktion weiter reduziert. (Denn diese Reduktion führt dazu, daß q sowohl auf der „wahr“-Seite als auch auf der „falsch“-Seite steht.)

Die neue Formel des zweiten aus Ast 1.1 entstehenden Astes ist die Konjunktion $(p \wedge r)$ auf der „falsch“-Seite. Reduktion einer Konjunktion auf der „falsch“-Seite führt abermals zu einer Tableauspaltung. Von den dabei entstehenden Ästen schließt der, in dem r auf der „falsch“-Seite vorkommt. Aber der andere Ast, der auf seiner „falsch“-Seite q enthält, schließt nicht;

und da wir unser Pulver jetzt verschossen haben — es gibt keine reduzierbaren Formeln mehr — bleibt dieser Tableau-Ast offen. Das Ergebnis ist in (11) abgebildet.

(11)

<table>
<tr><th colspan="6">wahr</th><th colspan="6">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="6">$\neg(p \vee (q \wedge r))$
$(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$
$r \vee q$</td><td colspan="6">$\neg(r \vee q)$

$p \vee (q \wedge r)$
p
$q \wedge r$</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="2"></td><td colspan="4">q</td><td colspan="2">r</td></tr>
<tr><td colspan="3">r</td><td rowspan="3">q
▬</td><td rowspan="3">r
▬</td><td rowspan="3">q</td><td colspan="3"></td><td rowspan="3">▬</td><td rowspan="3">▬</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td rowspan="2">$q \wedge r$
q
r
▬</td><td colspan="2">$p \wedge r$</td><td rowspan="2">▬</td></tr>
<tr><td></td><td>▬</td><td>p</td><td>r
▬</td></tr>
<tr><td>Ast 1.1. 1.1</td><td>Ast 1.1. 1.2</td><td>Ast 1.1. 2</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td><td>Ast 1.1. 1.1</td><td>Ast 1.1. 1.2</td><td>Ast 1.1. 2</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td></tr>
</table>

Da in dem betreffenden Tableau-Ast — Ast 1.1.1.1 von (11) — alle Formeln bis auf ihre atomaren Konstituenten reduziert sind und sich keine Inkonsistenz ergeben hat, dürfen wir schließen, daß ein Gegenbeispiel existiert. Dieses Gegenbeispiel — diejenige Kombination von Wahrheitswerten der Atome p, q und r, die die Prämissen wahr und den Schluß falsch macht — läßt sich direkt aus dem Ast ablesen: Im Ast kommt r unter „wahr“ vor, während p und q beide unter „falsch“ vorkommen. Die entsprechende Bewertung der Atome von (11) — p falsch, q falsch, r wahr — wird dann alle Formeln auf der „wahr“-Seite im Ast verifizieren und alle Formeln auf der „falsch“-Seite falsifizieren. Insbesondere sind die Prämissen unter dieser Bewertung wahr und der Schluß falsch. (Daß dies in der Tat so ist, läßt sich leicht mittels einer direkten Berechnung verifizieren.)

Indem wir alle nicht-atomaren Formeln im linken Ast reduziert und dort keinen Widerspruch gefunden (d. h. keinen Abschluß erreicht) haben, haben wir ein Gegenbeispiel gefunden. Es ist also nicht nötig, auch den zweiten noch offenen Tableau-Ast von (10) (Ast 2.2) weiterzuverfolgen, indem man die dort noch verbleibenden nicht-atomaren Formeln reduziert. Tun wir dies dennoch, so zeigt sich, daß auch hier die Reduktion des Konditionals $(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$ zu einer Verzweigung in zwei Äste führt, von denen wiederum einer geschlossen ist, während der andere sich nochmal in zwei Äste teilt, die beide offen bleiben. Diese beiden Äste bestimmen dasselbe Gegenbeispiel: p falsch, q wahr und r falsch.

Insgesamt gibt es also zwei Bewertungen, die die Prämissen wahr und den Schluß falsch machen.

Die Tableau-Methode für den Aussagenkalkül haben wir jetzt vollständig beschrieben. Es sollte intuitiv klar sein, daß die systematische Anwendung der Junktorenregeln immer in endlich vielen Schritten entweder zu einem Gegenbeispiel für ein Argument $A_1, \ldots, A_n \models B$ führt oder zu einem Tableau, in dem alle Äste abgeschlossen sind und das somit den Nachweis liefert, daß es kein Gegenbeispiel gibt. Also ist die Methode ein *Entscheidungsverfahren*: Immer führt sie in endlich vielen Schritten eine Antwort herbei auf die Frage: “Ist dieses Argument gültig oder nicht?”. Für einen Beweis dieser Behauptung — daß die Tableaumethode für die Aussagenlogik ein Entscheidungsverfahren ist – verweisen wir auf die Literatur (z. B. Beth, 1961).

2.2. **Prädikatenlogik.**

Auch für die Prädikatenlogik gibt es eine Tableau-Methode. Sie ergibt sich dadurch, daß wir die schon eingeführten Junktorenregeln um Reduktionsregeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$ ergänzen. Wiederum demonstrieren wir die Methode zuerst anhand einiger Beispiele.

Das erste Beispiel betrifft ein uns schon bekanntes Argument, welches besagt, daß von den beiden Skopuslesarten von Sätzen wie „Alle Studenten arbeiten an einem Rechner.“ die eine Lesart, nach der der Existenzquantor weiten Skopus hat, die andere Lesart, die dem All-Quantor weiten Skopus zuweist, logisch impliziert:

(12)

$$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,y))) \models (\forall x)\,(P(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$$

Wie immer fangen wir mit einem Tableau an, in dem die Prämisse unter „wahr“ und der Schluß unter „falsch“ eingetragen ist.

(13)

wahr	falsch
$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,y)))$	$(\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$

Da beide Formeln in (13) mit einem Quantor beginnen, sind die Junktorenregeln, die wir bis jetzt diskutiert haben, nicht anwendbar. Wir brauchen Reduktionsregeln für Quantoren. Ob wir zuerst die linke oder die rechte Formel reduzieren, ist in dem vorliegenden Fall egal. Fangen wir mit der linken Formel an.

Die Reduktionsregel für Formeln dieses Typs — des Typs einer mit dem $\exists$-Quantor beginnenden Formel in der „wahr"-Spalte — läßt sich folgendermaßen begründen. Damit der Satz $(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,y)))$ wahr ist, muß die Formel $Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,y))$ von irgendeinem Objekt *a* erfüllt sein. Wir können diese Bedingung auch so ausdrücken: Irgendeine Instanz der Formel — eine Formel also der Form „$Q\,(c) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,c))$", in der die existentiell gebundene Variable *y* durch eine „beliebige" Individuenkonstante *c* ersetzt ist — muß wahr sein. (*c* ist dabei als die Bezeichnung des beliebigen Objekts *a* zu verstehen.) Um sicherzustellen, daß die Konstante „unbelastet" ist, d. h. daß sie nicht schon vorher als Bezeichnung eines Objekts in das Tableau eingeführt worden ist, wählen wir bei der Reduktion einer in der „wahr"-Spalte stehenden Existenzformel immer eine *neue* Individuenkonstante, d. h. eine Konstante, die bisher noch nicht im Tableau vorkommt.

In der Literatur zum Thema „Semantische Tableaus" werden die Individuenkonstanten, die bei der Reduktion von quantifizierten Formeln in das Tableau eingeführt werden, oft „Parameter" genannt. Wir übernehmen diese Terminologie. Als Parametersymbole werden wir meistens die Buchstaben „*a*", „*b*", „*c*", … statt der bisher üblichen Individuenkonstanten „*c*", „c_1", … , „c_i", … verwenden.

Die Anwendung der oben beschriebenen Regel auf die linke Formel von (13) führt zu

(14)

wahr	falsch
$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,y)))$	$(\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,a))$	

Der nächste Schritt ist von einem uns schon bekannten Typ: Wir reduzieren die gerade unter „wahr" entstandene Konjunktion $Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,a))$:

(15)

wahr	falsch
$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,y)))$	$(\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,a))$	
$Q\,(a)$	
$(\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,a))$	

Wir könnten jetzt mit der all-quantifizierten Formel auf der linken Seite weitermachen. Wie sich aber herausstellt, ist es in diesem Fall effizienter, zuerst die Formel auf der rechten Seite zu reduzieren. Diese Formel, eine all-quantifizierte Formel in der „falsch"-Spalte, stellt einen ähnlichen Fall dar wie die Existenzformel unter „wahr", die wir im ersten Tableauschritt reduziert haben. Damit eine all-quantifizierte Formel falsch ist, muß es irgendein Objekt geben, das die Formel falsifiziert; d. h. irgendeine Instanz der Formel — irgendein Formel also, die wir bekommen, indem wir den All-Quantor tilgen und die von ihm gebundene Variable durch eine Konstante ersetzen — muß falsch sein. Wiederum wissen wir über das falsifizierende Objekt weiter nichts, und deshalb sollten wir für die Substitution eine bisher noch nicht im Tableau vorkommende Konstante verwenden.

Die in diesem Fall anzuwendende Regel ist also mit der für Existenzformeln unter „wahr" völlig symmetrisch (genauso wie die Regel für Formeln von der Form $A \wedge B$ unter „falsch" ein symmetrisches Gegenstück der Regel für $A \vee B$ unter „wahr" ist). Wenden wir die Regel an, indem wir *b* als neuen „Parameter" für die all-quantifizierte Variable *x* einsetzen, so ergibt sich:

(16)

wahr	falsch
$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,y)))$	$(\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,a))$	
$Q\,(a)$	
$(\forall x)\,(P\,(x) \rightarrow R\,(x,a))$	
	$P\,(b) \rightarrow (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$

Der an diesem Punkt naheliegende Schritt — die Reduktion des gerade entstandenen Konditionals — ist wiederum ein uns schon bekannter:

(17)

wahr	**falsch**
$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to R(x,y)))$	$(\forall x)\,(P(x) \to (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$	
$Q(a)$	
$(\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$	
	$P(b) \to (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$
$P(b)$	$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$

Als darauffolgender Schritt bietet sich jetzt die Reduktion der Existenzformel auf der „falsch“-Seite an. (Wir könnten an diesem Punkt genausogut mit der All-Formel auf der „wahr“-Seite weitermachen.) Damit die Formel $(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$ falsch ist, darf ihre *Matrix* $(Q(y) \wedge R(b,y))$ von keinem Objekt erfüllt werden, muß also von allen Objekten falsifiziert werden. Das bedeutet, daß jede Instanz $Q(c) \wedge R(b,c)$ der Formel falsch sein muß. Mit anderen Worten, die Bedingung, daß die Formel $(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$ falsch ist, erlaubt es uns, die „falsch“-Spalte um beliebige Instanzen zu erweitern. Insbesondere sind wir berechtigt, Instanzen einzutragen, in denen für die Variable y eine schon vorher im Tableau verwendete Konstante eingesetzt wird. Zum Beispiel können wir y durch den schon eingeführten Parameter a ersetzen. Tun wir dies, dann ergibt sich aus (17) das Tableau (18):

(18)

wahr	**falsch**
$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to R(x,y)))$	$(\forall x)\,(P(x) \to (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$	
$Q(a)$	
$(\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$	
	$P(b) \to (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$
$P(b)$	$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$
	$Q(a) \wedge R(b,a)$

Die jetzt durchzuführende Reduktion der neu entstandenen Konjunktion auf der „falsch“-Seite von (18) führt, wie wir schon im Abschnitt über den Aussagenkalkül gesehen haben, zu einer Verzweigung. Der linke der beiden dabei entstehenden Äste (Ast 1 in (19)) schließt sich gleich, da die Formel $Q(a)$ hier sowohl unter „falsch“ als auch unter „wahr“ vorkommt.

(19)

<table>
<tr><th colspan="2">wahr</th><th colspan="2">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="2">$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to R(x,y)))$
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$
$Q(a)$
$(\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$
$P(b)$</td><td colspan="2">$(\forall x)\,(P(x) \to (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$
$P(b) \to (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$
$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$
$Q(a) \wedge R(b,a)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$Q(a)$</td><td>$R(b,a)$</td></tr>
<tr><td>Ast 1</td><td>Ast 2</td><td>Ast 1</td><td>Ast 2</td></tr>
</table>

Der rechte Ast muß aber weiter untersucht werden. In diesem Ast gibt es immer noch eine bisher nicht reduzierte Formel, die all-quantifizierte Formel $(\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$ in der „wahr“-Spalte. Diese stellt einen ähnlichen Fall dar wie die schon diskutierte Existenzformel $(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$ in der „falsch“-Spalte: Damit $(\forall x)\,(P(x) \to R(x,a))$ wahr ist, muß jede ihrer Instanzen wahr sein. Also dürfen wir beliebige solche Instanzen in die „wahr“-Spalte des All-Satzes eintragen, und gerade auch solche, die entstehen, wenn wir die quantifizierte Variable durch eine schon im Tableau vorkommende Konstante ersetzen. Demnach dürfen wir insbesondere den Parameter b für die Variable x in $P(x) \to R(x,a)$ einsetzen. Das Resultat ist (20).

(20)

<table>
<tr><th colspan="2">wahr</th><th colspan="2">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="2">$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$
$Q\,(a)$
$(\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$
$P\,(b)$</td><td colspan="2">$(\forall x)\,(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$

$P\,(b) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$
$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$
$Q\,(a) \wedge R\,(b,a)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$P\,(b) \to R\,(b,a)$</td><td>$Q\,(a)$</td><td>$R\,(b,a)$</td></tr>
<tr><td>Ast 1</td><td>Ast 2</td><td>Ast 1</td><td>Ast 2</td></tr>
</table>

Die Reduktion des Konditionals in (20) führt nochmals zu einer Spaltung:

(21)

<table>
<tr><th colspan="3">wahr</th><th colspan="3">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="3">$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$
$Q\,(a)$
$(\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$
$P\,(b)$</td><td colspan="3">$(\forall x)\,(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$

$P\,(b) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$
$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$
$Q\,(a) \wedge R\,(b,a)$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$P\,(b) \to R\,(b,a)$</td><td>$Q\,(a)$</td><td colspan="2">$R\,(b,a)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$R\,(b,a)$</td><td></td><td>$P\,(b)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Ast 1</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td><td>Ast 1</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td></tr>
</table>

Da in dem ersten der so entstandenen Äste die Formel $P\,(b)$ schon auf der „wahr“-Seite vorkommt und wir im zweiten Ast die Formel $R\,(a,b)$ schon auf der „falsch“-Seite haben, schließen beide Äste; und damit ist jetzt das Tableau insgesamt geschlossen. Also haben alle Versuche, ein Gegenbeispiel zu konstruieren, zum Mißerfolg geführt und folglich ist das Argument (12), für das dieses Tableau konstruiert wurde, gültig.

Wenn wir Prämisse und Schluß in (12) austauschen, dann bekommen wir ein Argument, das bekanntlich ungültig ist:

(22)

$$(\forall x)\,(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y))) \vDash (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$$

Die Tableaumethode sollte also in diesem Fall nicht zu einem geschlossenen Tableau führen.

Wir führen die Tableaukonstruktion auch diesmal Schritt für Schritt durch.

(23)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$	$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$
Einziger Ast	**Einziger Ast**

Wir fangen wiederum mit der Formel auf der „wahr“-Seite an. (Auch diesmal ist es egal, ob wir mit dieser linken oder mit der rechten Formel anfangen.) Diese Formel fängt mit einem All-Quantor an, kann also nur dann wahr sein, wenn alle ihre Instanzen wahr sind. Bei der letzten Tableaukonstruktion sind wir diesem Fall auch schon begegnet, aber dort in einer Situation, in der vorher schon Parameter eingeführt wurden, die wir bei der Reduktion der Formel verwenden konnten. In der jetzigen Situation ist das nicht der Fall. Da aber das Wahr-Sein der Formel impliziert, daß alle ihre Instanzen gelten, können wir ohne Gefahr eine beliebige Individuenkonstante einführen und diese für die vom All-Quantor gebundene Variable einsetzen.[1] Wählen wir die Konstante b. Das Ergebnis ist (24).

[1]Genaugenommen ist dies nur deshalb unproblematisch, weil in der klassischen Logik angenommen wird, daß es immer mindestens ein Objekt gibt — eine Annahme, die sich modell-theoretisch darin widerspiegelt, daß von jedem Modellangenommen wird, daß es ein nicht-leeres Universum hat.

(24)

wahr	**falsch**
$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$ $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$	$(\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$
Einziger Ast	**Einziger Ast**

Mit Hilfe der Regel für Konditionale in der „wahr"-Spalte können wir jetzt die gerade entstandene Formel weiter reduzieren. Dabei verzweigt sich das Tableau.

(25)

wahr		**falsch**	
$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$ $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$		$(\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$	
	$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$	$P(b)$	
Ast 1	**Ast 2**	**Ast 1**	**Ast 2**

Wir machen mit dem linken Tableau-Ast weiter. Die Existenzformel in der „falsch"-Spalte erfordert das Falsch-Sein aller ihrer Instanzen und erlaubt eine Reduktion, in der die Variable y durch b ersetzt wird:

(26)

wahr		**falsch**	
$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$ $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$		$(\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$	
	$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$	$P(b)$ $(Q(b) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,b)))$	
Ast 1	**Ast 2**	**Ast 1**	**Ast 2**

Die Reduktion der so entstandenen Konjunktion führt wiederum zu einer Spaltung:

(27)

wahr			**falsch**		
$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$ $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$			$(\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,$		
		$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$	$P(b)$ $Q(b) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,b))$		
			$Q(b)$	$(\forall x)(P(x) \to R(x,b))$	
Ast 1.1	**Ast 1.2**	**Ast 2**	**Ast 1.1**	**Ast 1.2**	**A**

Betrachten wir jetzt den linken der beiden so entstandenen Äste. In diesem Tableau-Ast gibt es für jede auf der „wahr"-Seite sowie für jede auf der „falsch"-Seite vorkommende komplexe Formel C ein „Reduktionsprodukt" (eine Teilformel von C, wenn der Hauptoperator von C ein Junktor ist, oder eine Instanz von C, wenn dieser Operator ein Quantor ist), das das „wahr"-Seiten-Vorkommen oder „falsch"-Seiten-Vorkommen der Formel, die zu ihr geführt hat, „rechtfertigt". Z. B. rechtfertigt das „falsch"-Seiten-Vorkommen von $Q(b)$ das „falsch"-Seiten-Vorkommen von $Q(b) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,b))$; denn ist $Q(b)$ falsch, dann muß auch $Q(b) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,b))$ falsch sein; ebenso rechtfertigt das „falsch"-Seiten-Vorkommen von $P(b)$ das „wahr"-Seiten-Vorkommen von $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$, usw.

Die Beziehung zwischen der ursprünglichen Prämisse des Arguments und ihrer Instanz $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$ ist eine etwas andere. Hier ist die Implikationsbeziehung zwischen der quantifizierten Formel und ihrer Instanz umgekehrt: Das Wahr-Sein einer Instanz eines All-Satzes ist zwar eine notwendige, doch im allgemeinen keine hinreichende Bedingung für das Wahr-Sein des All-Satzes selbst.

Bezüglich eines Universums, das nur aus dem einen Element b besteht, ist die Bedingung aber nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend: Ein All-Satz $(\forall x)C(x)$ ist wahr in Bezug auf ein Universum, wenn alle Elemente des Universums die entsprechende Formel $C(x)$ erfüllen. Wenn dieses Universum nur aus b besteht, dann reduziert sich diese Bedingung auf das Erfüllt-Sein von $C(x)$ durch b.

Dasselbe gilt für den Existenzsatz $(\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$, in der „falsch"-Spalte und die dort ebenfalls eingetragene Instanz $(Q(b) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,b)))$. Im Allgemeinen ist das Falsch-Sein der Instanz nur eine notwendige Bedingung für das Falsch-Sein des Existenzsatzes. Ist aber b das einzige Element überhaupt, dann ist sie gleichzeitig auch hinreichend.

Aus diesen Erwägungen folgt, daß in einem Modell M, dessen Universum die Einermenge $\{b\}$ ist und in dem die im betrachteten Ast auftretenden atomaren Formeln wahr bzw. falsch sind abhängig davon, ob sie in der „wahr"-Spalte oder in der „falsch"-Spalte stehen, auch die komplexen Formeln unter „wahr" bzw. „falsch" die ihrer Position im Tableau entsprechenden Wahrheitswerte bekommen (Wahr, wenn links, Falsch wenn rechts). Insbesondere wird in einem solchen Modell die Prämisse wahr und der Schluß falsch sein. Mit anderen Worten, das Modell ist ein Gegenbeispiel für das Ausgangsargument (22).

Um sicherzustellen, daß das Modell M in der Tat ein Gegenbeispiel für das Ausgangsargument (22) ist, genügt es also, die Extensionen in M für die in Prämisse und Schluß vorkommenden Prädikate so zu wählen, daß sie mit den Vorkommen der atomaren Formeln unter „Wahr" und Falsch" im Einklang sind. Für die Prädikate P und Q bedeutet dies, daß ihre Extension in M die leere Menge sein muß. Denn das „falsch"-Seiten-Vorkommen der atomaren Formeln $P(b)$ und $Q(b)$ bestimmt, daß b, das einzige Element des Universums von M, weder zur Extension von P noch zu der von Q gehören darf. Atomare Formeln, deren Prädikat R ist, kommen in unserem Tableau-Ast weder auf der „wahr"-Seite noch auf der „falsch"-Seite vor. Dies bedeutet, daß wir die Extension von R im Modell beliebig wählen können. Die Wahl wird auf die entscheidende Frage — Ist die Prämisse wahr und der Schluß falsch? — keinen Einfluß haben.

Wählen wir für die Extension von R im Modell ebenfalls die leere Menge, so kommen wir zur folgenden Definition unseres „Gegenmodells" M:

(28)

$$\begin{aligned} U_M &= \{b\} \\ P_M &= \emptyset \\ Q_M &= \emptyset \\ R_M &= \emptyset \end{aligned}$$

Es läßt sich unschwer verifizieren, daß in diesem Modell M die Prämisse von (22) wahr ist und der Schluß von (22) falsch.

Die beiden bisher betrachteten Beispiele deuten darauf hin, daß sich die Methode der Semantischen Tableaus auch für den Prädikatenkalkül eignet. Es gibt aber einen grundsätzlichen Unterschied zwischen der im vorigen Abschnitt dargestellten Tableaumethode für die Aussagenlogik und ihrer Erweiterung auf die Prädikatenlogik. Für Argumente der Aussagenlogik führt die Tableau-Methode, wie wir gesehen haben, immer zu einer Entscheidung — entweder zu einem Beweis, daß das betreffende Argument gültig ist (indem sich das Tableau schließt) oder zum Nachweis seiner Ungültigkeit (indem eine Belegung) der im Argument vorkommenden Atome gefunden wird, die die Prämissen wahr und den Schluß falsch macht). Die Tableaumethode ist also ein Entscheidungsverfahren.

Die Erweiterung der Tableaumethode auf die Prädikatenlogik ist hingegen kein Entscheidungsverfahren. Die oben schon im allgemeinen Zusammenhang beschriebene Sachlage für prädikatenlogische Beweisverfahren hat auch für die Tableaumethode ihre Geltung. Hier macht sie sich folgendermaßen bemerkbar: Wenn ein prädikatenlogisches Argument $A_1, \ldots, A_n \models B$ gültig ist, dann läßt sich dies immer nachweisen, indem das für dieses Argument konstruierte Tableau zum Abschluß gebracht wird. Aber wie viele Reduktionsschritte erforderlich sind, um den Abschluß herbeizuführen, läßt sich im allgemeinen nicht voraussagen. Andererseits wird die Tableaukonstruktion für ein ungültiges Argument in bestimmten Fällen unendlich viele Reduktionschritte in Anspruch nehmen. In diesen Fällen sind nämlich unendlich viele Schritte nötig, bis ein vollständiger offener Tableau-Ast entstanden ist, auf dessen Basis ein Gegenmodell definiert werden kann. Diese Situation tritt insbesondere dann auf, wenn die einzigen Gegenbeispiele für ein Argument unendliche Modelle sind. (Ein Beispiel werden wir sogleich diskutieren.)

Man könnte vielleicht denken, daß bei jeder Tableaukonstruktion nach endlich vielen Schritten ein Punkt erreicht wird, an dem erkennbar ist, ob man es mit einem gültigen oder ungültigen Argument zu tun hat: Insbesondere könnte man sich vorstellen, daß bei ungültigen Argumenten immer nach einer endlichen Anzahl von Schritten sichtbar wird, daß einer der noch offenen Tableau-Äste auch durch zusätzliche Konstruktionsschritte nicht zum Abschluss gebracht werden kann, und auch wie sich aus diesem Ast ein Gegenmodell konstruieren läßt.

Dem ist aber nicht so. Im allgemeinen läßt sich an keinem Punkt einer Tableaukonstruktion mit Sicherheit sagen, ob das Tableau nicht doch noch durch zusätzliche Regelanwendungen zum Abschluß gebracht werden könnte. (Präzise formuliert: Es läßt sich keine berechenbare Funktion f angeben, die für ein beliebiges Argument $A_1, \ldots, A_n \models B$ eine Zahl N bestimmt, derart, daß, wenn man nach N Schritten in der Konstruktion eines semantischen Tableaus für $A_1, \ldots, A_n \models B$ noch keinen Abschluß erreicht hat, folgt, daß es bei Fortführung der Tableaukonstruktion nicht mehr zum Tableauabschluß kommen wird und das Argument somit ungültig ist.

Fassen wir diese Beobachtungen noch mal kurz zusammen. Es gibt für die Konstruktion eines semantischen Tableaus für ein Argument der Prädikatenlogik die folgenden Möglichkeiten:

(i) Schließt sich das Tableau nach endlich vielen Schritten, so wissen wir, daß das Argument gültig ist.

(ii) Hat aber das Tableau nach N Schritten (auch bei sehr großem N) immer noch offene Äste, so läßt sich im allgemeinen über die Gültigkeit des Arguments keine endgültige Aussage treffen.

2.3. **Undendliche Tableaus.**

Nur in bestimmten (verhältnismäßig einfachen) Fällen terminiert die Tableaukonstruktion nach endlich vielen Schritten auch dann, wenn sich das Tableau nicht schließt: Alle möglichen Formelreduktionen sind durchgeführt worden und es gibt keine weiteren Regelanwendungen mehr. In einem solchen Fall läßt sich auf der Grundlage eines der noch offenen Äste mit dem für den Fall (22) beschriebenen Verfahren ein Gegenmodell definieren; und wir wissen mit Sicherheit, dass das Argument ungültig ist. Aber solche Fälle sind verhältnismäßig selten. Auch in bestimmten Fällen, in denen sich die Tableaukonstruktion ins Unendliche fortsetzt, ist manchmal nach einer gewissen endlichen Anzahl von Schritten intuitiv klar, dass zusätzliche Schritte keinen Abschluß mehr herbeiführen werden. Aber meist geht es dabei um Heuristiken, die nur begrenzt anwendbar sind. Ein allgemeines Verfahren, das erlauben würde, in jedem Fall nach einer bestimmten endlichen Zahl von Schritten die Konstruktion eines noch offenen Tableaus in der Gewißheit abzubrechen, daß es keinen Abchluß geben wird, gibt es nicht.

In unserem nächsten Beispiel läuft die Tableaukonstruktion im Prinzip immer weiter, aber es wird nach einigen Schritten dennoch ein sich endlos wiederholendes Muster sichtbar, in dem der Schlüssel eines Gegenmodells enthalten ist. Das Argument, um das es bei diesem Beispiel geht, ist von einem Typus, dem wir noch nicht begegnet sind, der aber in der Praxis der Logik recht oft vorkommt. Wir werden zuerst etwas über Argumente dieses Typus sagen.

Die Argumente sind alle von der Form (29).

(29)

$A_1,\dots,A_n \vDash \neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$

(29) ist ein Argument mit einem widersprüchlichen Schluß, einem Schluß, der in keinem Modell M wahr sein kann. (Jedes Element von U_M erfüllt die Formel $P(x) \vee \neg P(x)$; also gibt es, da U_M immer mindestens ein Element enthält, auch ein Element in U_M, das diese Formel erfüllt.) Das bedeutet, daß jedes Modell M, in dem die Prämissen $A_1,\dots,A_n$ alle wahr sind, ein Gegenbeispiel zu (29) ist; denn der Schluß $\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$ ist ja ohnehin falsch in M. Also ist (29) nur dann gültig, wenn seine Prämissen inkonsistent sind, d. h. wenn es kein Modell gibt, in dem die Prämissen alle zugleich wahr sind.

Konstruieren wir ein Tableau für ein solches Argument, dann gibt es also zwei Möglichkeiten: Entweder schließt sich das Tableau; dann ist das Argument gültig und damit die Prämissenmenge inkonsistent. Oder das Tableau kommt nie zu einem Abschluß; dann gibt es ein Gegenbeispiel und die Prämissen sind konsistent. Wir können demnach versuchen, die Konsistenz der Prämissen von (29) durch die Konstruktion eines Tableaus nachzuweisen.

Wir betrachten jetzt folgendes Beispiel für Schema (29)

(30)

$(i),(ii),(iii) \vDash \neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$

in dem (i), (ii), (iii) die folgenden Formeln sind:

(i) $(\forall x)(\forall y)(x < y \to \neg y < x)$

(ii) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \to x < z)$

(iii) $(\forall x)(\exists y)\, x < y$

Die Prämissen von (30) beschreiben, wie wir im ersten Teil des Skripts gesehen haben, eine strikte partielle Ordnung, für die es kein letztes Element gibt. (Zur leichteren Lesbarkeit der Formeln verwenden wir das Symbol „<“ als das zweistellige Prädikat, das nach den „Axiomen“ (i), (ii), (iii) eine solche Ordnung beschreibt.) Wir haben schon früher gesehen, daß es solche Ordnungen gibt. (Z. B. ist die lineare Ordnung der natürlichen Zahlen $0,1,2,\dots$ eine solche Ordnung.) Die natürlichen Zahlen, mit ihrer Standardanordnung als Interpretation für „Pünd einer beliebige Eigenschaft als Interpretation für P, bilden also ein Gegenmodell zu (30).[2] Folglich ist es ausgeschlossen, das Tableau für (30) zum Abschluß kommt.

Versuchen wir, ein Tableau für (30) zu konstruieren. Wie immer fangen wir damit an, die Prämissen unter „wahr“ und den Schluß unter „falsch“ einzutragen:

(31)

wahr	**falsch**
$(\forall x)(\forall y)(x < y \to \neg y < x)$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \to x < z)$ $(\forall x)(\exists y)\, x < y$	$\neg(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$
Einziger Ast	**Einziger Ast**

Zuerst behandeln wir den Schluß, indem wir links die Formel $(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$ eintragen und dann den Existenzquantor mit dem neuen Parameter a instanziieren.

[2] Es läßt sich nachweisen, daß es unendlich viele voneinander verschiedene Gegenmodelle zu (30) gibt.

(32)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$	
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$(P\,(a)\vee\neg P\,(a))$	
Einziger Ast	**Einziger Ast**

Die weitere Reduktion dieser Formel führt zu einer Verzweigung, mit $P\,(a)$ unter „wahr“ im linken Ast und $\neg P\,(a)$ unter „wahr“ im rechten Ast:

(33)

wahr		**falsch**	
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$		$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$			
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$			
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$			
$(P\,(a)\vee\neg P\,(a))$			
$P\,(a)$	$\neg P\,(a)$		
Ast 1	**Ast 2**	**Ast 1**	**Ast 2**

Damit haben wir den Schluß von (30) auf atomare Teilformeln reduziert und brauchen uns um ihn nicht weiter zu kümmern. Wir verfolgen jetzt nur den linken Ast (Ast 1) und vereinfachen die Tableaudarstellung, indem wir den rechten Ast (Ast 2) weglassen.

Der nächste Schritt, den wir durchführen, betrifft die letzte Prämisse. Wir instanziieren den All-Quantor dieser Prämisse mit dem Parameter a:

(34)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$	
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$\ldots$	
$P\,(a)$	
$(\exists y)\,a<y$	
Ast 1 (von zwei Ästen!)	**Ast 1 (von zwei Ästen!)**

Jetzt instanziieren wir den Existenzquantor der so entstandenen Formel. Dazu bedarf es eines neuen Parameters für den wir b wählen.

(35)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$	
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$\ldots$	
$P\,(a)$	
$(\exists y)\,a<y$	
$a<b$	
Ast 1 (von zwei Ästen!)	**Ast 1 (von zwei Ästen!)**

Die Reihenfolge der bis zu diesem Punkt gewählten Schritte lag gewissermaßen nahe (obwohl sich die Prinzipien, nach denen der erfahrene Tableaukonstrukteur verfährt, insgesamt nicht leicht präzise formulieren lassen —

diese Prinzipien sind eher „heuristisch"). Erzwungen war die Reihenfolge aber nicht; eine andere würde letztendlich zum selben Ziel führen, sei es vielleicht in mehr Schritten.

Auch die in (35) gezeigte Konstruktionsphase erlaubt eine Anzahl von möglichen Fortsetzungen. Und hier hilft auch die Erfahrung des geübten Tableaukonstrukteurs nichts. So oder so führen weitere Regelanwendungen in (35) zu einer immer größeren Vielfalt von zusätzlichen Regelanwendungsmöglichkeiten. In welcher Reihenfolge man vorgeht, ist dabei unerheblich.

Wir wählen zunächst die erste Prämisse und instanziieren ihre beiden All-Quantoren mit a und b. Diese beiden Schritte führen zu (36) bzw. (37):

(36)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$	
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$\dots$	
$P\,(a)$	
$(\exists y)\,a<y$	
$a<b$	
$(\forall y)\,(a<y\rightarrow\neg y<a)$	
Ast 1 (von zwei Ästen!)	**Ast 1 (von zwei Ästen!)**

(37)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$	
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$\dots$	
$P\,(a)$	
$(\exists y)\,a<y$	
$a<b$	
$(\forall y)\,(a<y\rightarrow\neg y<a)$	
$a<b\rightarrow\neg b<a$	
Ast 1 (von zwei Ästen!)	**Ast 1 (von zwei Ästen!)**

Die Reduktion des Konditionals führt wieder zu einer Verzweigung. Der linke der so entstandenen Äste (Ast 1.1 in (38)) schließt sich. Wir ignorieren diesen Ast und fahren fort mit dem rechten Ast (Ast 1.2 in (38)).

(38)

wahr		**falsch**	
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x < y \rightarrow \neg y < x)$		$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x) \vee \neg P\,(x))$	
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$			
$(\forall x)\,(\exists y)\,x < y$			
$(\exists x)\,(P\,(x) \vee \neg P\,(x))$			
$\dots$			
$P\,(a)$			
$(\exists y)\,a < y$			
$a < b$			
$(\forall y)\,(a < y \rightarrow \neg y < a)$			
$a < b \rightarrow \neg b < a$			
	$\neg b < a$	$a < b$	
Ast 1.1	**Ast 1.2**	**Ast 1.1**	**Ast 1.2**

In diesem rechten Ast wandert zuerst die Formel $b < a$ auf die „falsch“-Seite. Als nächsten Schritt instanziieren wir den All-Quantor der dritten Prämisse $(\forall x)\,(\exists y)\,x < y$ zum zweiten Mal, diesmal mit dem Parameter b. Der Existenzquantor der dabei entstehenden Existenzformel erfordert für ihre Instanziierung wiederum einen neuen Parameter c. Das Resultat dieser drei Regelanwendungen ist (39).

(39)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x < y \rightarrow \neg y < x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x) \vee \neg P\,(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x < y$	
$(\exists x)\,(P\,(x) \vee \neg P\,(x))$	
$\dots$	
$P\,(a)$	
$(\exists y)\,a < y$	
$a < b$	
$(\forall y)\,(a < y \rightarrow \neg y < a)$	
$a < b \rightarrow \neg b < a$	
$\neg b < a$	
	$b < a$
$(\exists y)\,b < y$	
$b < c$	
Ast 1.2	**Ast 1.2**

Aufgrund dessen, was wir über Ordnungen wissen, liegt es nahe, jetzt die Quantoren des Transitivitätsaxioms — also der zweiten Prämisse von (30) — mit a, b und c zu instanziieren. Das Ergebnis ist (40).

(40)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P(x)\vee\neg P(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$	
$(\exists x)\,(P(x)\vee\neg P(x))$	
$\dots$	
$P(a)$	
$(\exists y)\,a<y$	
$a<b$	
$(\forall y)\,(a<y\rightarrow\neg y<a)$	
$a<b\rightarrow\neg b<a$	
$\neg b<a$	
	$b<a$
$(\exists y)\,b<y$	
$b<c$	
$(\forall y)\,(\forall z)\,(a<y\wedge y<z\rightarrow a<z)$	
$(\forall z)\,(a<b\wedge b<z\rightarrow a<z)$	
$a<b\wedge b<c\rightarrow a<c$	
Ast 1.2	**Ast 1.2**

Die nächsten beiden Schritte — Reduktion des Konditionals und anschließend Reduktion von dessen Antezedenz (einer Konjunktion!) in der „falsch“-Spalte — führen jeweils zu Verzweigungen.

(41)

<table>
<tr><th colspan="3">wahr</th><th colspan="3">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="3">$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$
$(\exists x)\,(P(x)\vee\neg P(x))$
$\dots$
$P(a)$
$(\exists y)\,a<y$
$a<b$
$(\forall y)\,(a<y\rightarrow\neg y<a)$
$a<b\rightarrow\neg b<a$
$\neg b<a$

$(\exists y)\,b<y$
$b<c$
$(\forall y)\,(\forall z)\,(a<y\wedge y<z\rightarrow a<z)$
$(\forall z)\,(a<b\wedge b<z\rightarrow a<z)$
$a<b\wedge b<c\rightarrow a<c$</td><td colspan="3">$\neg\,(\exists x)\,(P(x)\vee\neg P(x))$

$b<a$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td rowspan="2">$a<c$</td><td colspan="2">$a<b\wedge b<c$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$a<b$</td><td>$b<c$</td></tr>
<tr><td>Ast 1.2.1.1</td><td>Ast 1.2.1.2</td><td>Ast 1.2.2</td><td>Ast 1.2.1.1</td><td>Ast 1.2.1.2</td><td>Ast 1.2.2</td></tr>
</table>

Wie in (41) angegeben, schließen sich die beiden ersten Äste. Wir befassen uns weiter mit dem dritten Ast.

Wie soll es jetzt weitergehen? Es gibt noch viele mögliche Instanziierungen der All-Quantoren der Prämissen mit unterschiedlichen Kombinationen der schon eingeführten Parameter. Z. B. könnte man die Quantoren der ersten Prämisse mit a und a instanziieren, oder mit b und a, oder mit a und c, und … — es gibt hier im Prinzip noch viele weitere Möglichkeiten. Es läßt sich aber leicht einsehen, daß, obgleich diese Instanziierungen zu neuen Informationen führen, diese den Ast nicht zum Abschluß bringen werden. Betrachten wir etwa die ersten zwei der soeben genannten. Die Instanziierung von (i) mit a und a führt zu (42):

(42)

wahr		**falsch**	
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$		$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$			
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$			
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$			
$\ldots$			
$P\,(a)$			
$(\exists y)\,a<y$			
$a<b$			
$(\forall y)\,(a<y\rightarrow\neg y<a)$			
$a<b\rightarrow\neg b<a$			
$\neg b<a$			
		$b<a$	
$(\exists y)\,b<y$			
$b<c$			
$(\forall y)\,(\forall z)\,(a<y\wedge y<z\rightarrow a<z)$			
$(\forall z)\,(a<b\wedge b<z\rightarrow a<z)$			
$a<b\wedge b<c\rightarrow a<c$			
$a<c$			
$a<a\rightarrow\neg a<a$			
	$\neg a<a$	$a<a$	$a<a$
Ast 1.2.2.1	**Ast 1.2.2.2**	**Ast 1.2.2.1**	**Ast 1.2.2.2**

In (42) haben wir eine Verzweigung mit zwei identischen Ästen — in beiden haben wir die zusätzliche Formel $a<a$ in der „falsch“-Spalte. Es ist jetzt egal, mit welchem Ast wir weitermachen; denn ist es möglich, den einen zum Abschluß zu bringen, so wird das auch für den anderen gelingen.

Die Instanziierung von (i) mit a und c bringt uns dem Abschluß des Astes auch nicht wesentlich näher. Von den zwei Ästen, die sich aus der darauffolgenden Reduktion des Konditionals $a<c\rightarrow\neg c<a$ und der Negationsformel $\neg c<a$ ergeben, schließt sich der, in dem $a<c$ unter „falsch“ eingetragen wird, und in dem anderen Ast haben wir die zusätzliche Formel $c<a$ unter „falsch“. Alle sonstigen Subsitutionen von a, b und c für

die All-Quantoren der Prämissen haben einen ähnlichen Effekt: Es kommen zwar in den „verbleibenden“ (also, noch offenen) Ästen neue Formeln hinzu, aber ein Abschluß des gesamten Tableaus wird auf diese Weise nicht erreicht.

Eine weitere Möglichkeit, (41) fortzusetzen), ist, den All-Quantor der dritten Prämisse mit c zu instanziieren. Daraus ergibt sich eine neue Existenzformel. Die Instanziierung des Quantors dieser Formel erfordert dann wieder einen noch nicht vorkommenden Parameter, etwa d. Diese beiden Schritte führen zu (43), worin auch das Ergebnis der oben beschriebenen Instanziierungen — die Formeln $a<a$ und $c<a$ unter „falsch“ — eingetragen ist.

(43)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x<y\rightarrow\neg y<x)$	$\neg\,(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$	
$(\forall x)\,(\exists y)\,x<y$	
$(\exists x)\,(P\,(x)\vee\neg P\,(x))$	
$\ldots$	
$P\,(a)$	
$(\exists y)\,a<y$	
$a<b$	
$(\forall y)\,(a<y\rightarrow\neg y<a)$	
$a<b\rightarrow\neg b<a$	
$\neg b<a$	
	$b<a$
$(\exists y)\,b<y$	
$b<c$	
$(\forall y)\,(\forall z)\,(a<y\wedge y<z\rightarrow a<z)$	
$(\forall z)\,(a<b\wedge b<z\rightarrow a<z)$	
$a<b\wedge b<c\rightarrow a<c$	
$a<c$	
	$a<a$
	$c<a$
$(\exists y)\,c<y$	
$c<d$	
Ast 1.2.2	**Ast 1.2.2**

Jetzt fängt, könnte man sagen, die Geschichte wieder von vorne an: Wir können (ii) mit b, c und d instanziieren. Das führt zu der Formel $b < d$ unter „wahr“. Eine weitere Instanziierung von (ii) mit a, b und d führt zu $a < d$ unter „wahr“; und schließlich wird eine Instanziierung des All-Quantors von (iii) mit d über die darauffolgende Instanziierung des Existenzquantors von $(\exists y)\, c < y$ wiederum einen neuen Parameter erzeugen.

Allmählich drängt sich der Eindruck auf, daß wir auf diese Weise immer mehr Parameter einführen, aber daß es zu einem Abschluß des gesamten Tableaus wohl nie kommen wird. (Dieser Eindruck ist natürlich mit dem in Einklang, was wir ohenhin schon wissen — daß die Prämissen (i), (ii), (iii) ein Modell besitzen und somit konsistent sind.)

Es stellt sich nun aber die Frage, inwiefern die bis zu diesem Punkt durchgeführte Entfaltung des in (43) dargestellten Tableau-Astes es uns ermöglicht, ein „Gegenmodell“ zu konstruieren, in dem die drei Prämissen gelten. Und da sehen wir gleich, daß die Lage komplizierter ist als bei der Tableaukonstruktion für unser letztes Beispiel (22). Dort konnte ein Gegenmodell direkt aus dem von uns ausgewählten offenen Tableau-Ast konstruiert werden: Als U_M wurde die Menge der eingeführten Parameter gewählt, und die Extensionen der Prädikate wurden aufgrund der Vorkommen der betroffenen atomaren Formeln unter „wahr“ und „falsch“ bestimmt. So einfach geht es hier nicht. So einfach kann es auch gar nicht gehen, denn, wie unten ausgeführt, hat die Prämissenmenge (i), (ii), (iii) nur unendliche Modelle. Dieser Umstand spiegelt sich in der Möglichkeit wider, den All-Quantor der Prämisse (iii) immer wieder mit vorher eingeführten Parametern zu instanziieren, wonach die so entstandene Existenzformel dann wieder zur Einführung eines neuen Parameters führt. Das bedeutet, daß die bis zu einem bestimmten Punkt ausgeführten Tableauschritte allenfalls eine Idee vermitteln könnten, wie ein solches Modell auszusehen hätte: U_M sollte aus einer unendlichen Menge von Objekten $a, b, c, d, \ldots$ bestehen; und die in (43) vorhandenen atomaren Formeln suggerieren für $<$ eine Extension $<_M$, die aus den folgenden Paaren besteht: $\langle a,b\rangle$, $\langle b,c\rangle$, $\langle a,c\rangle$, $\langle c,d\rangle$, $\langle b,d\rangle$, $\langle a,d\rangle$, $\ldots$ — mit anderen Worten, $<$ soll den Objekten $a, b, c, d, \ldots$ die Ordnung auferlegen, die ihrer Aufzählung „$a, b, c, d, \ldots$ “ entspricht.

Intuitiv ist klar, daß es für die Prämissen (i), (ii) und (iii) kein endliches Modell geben kann. Jeder neue Parameter, der für den Existenzquantor von (iii) eingeführt wird, muß in der erzeugten Ordnung rechts von dem Parameter liegen, der für den All-Quantor substituiert wurde. (Im oben konstruierten Tableau muß b rechts von a liegen, c rechts von b, d rechts von c, usw.) Insbesondere ist es nicht möglich, ein Modell auf der Basis der nur endlich vielen Parameter zu definieren, die in einer endlichen Anzahl von Konstruktionsschritten eingeführt werden. In (43) reichen z. B. die Parameter a, b, c, d nicht aus, weil (iii) u. a. fordert, daß es ein Element gibt, das rechts von d liegt. Weder a noch b noch c kommen dafür in Betracht, weil für sie schon feststeht, daß sie links von d liegen müssen. Also brauchen wir

noch ein weiteres Element e. Dieses verlangt dann aber seinerseits wieder ein Element zu seiner Rechten, usw.

Der soeben diskutierte Fall ist noch verhältnismäßig übersichtlich. Er zeigt, daß, auch wenn es für ein Argument nur unendliche Gegenmodelle gibt, man einem solchen Modell manchmal durch einen geschickt gewählten Anfang der Tableaukonstruktion auf die Schliche kommen kann. Im allgemeinen ist dies aber — wir wiederholen! — nicht der Fall. Wenn ein Argument ungültig oder eine Formelmenge konsistent ist, und es darum geht, ein (Gegen-)Modell zu konstruieren, dann liefert die Tableaumethode dafür zwar eine oft wertvolle Heuristik. Sie ist aber nicht geeignet, nach endlich vielen Schritten ein Gegenmodell eindeutig zu bestimmen. Dieser Umstand ist mit dafür verantwortlich, dass die Tableaumethode für die Prädikatenlogik kein Entscheidungsverfahren ist. Wenn wir nicht von vornherein wissen, ob ein Argument gültig ist oder nicht, dann werden wir im allgemeinen auch nach N Tableaukonstruktionsschritten noch nicht sagen können, ob es gültig ist. Ist an dem Punkt noch kein Abschluß des gesamten Tableaus erreicht, dann braucht aus den noch offenen Ästen des so weit konstruierten Tableaus nicht erkennbar zu sein, ob es ein Gegenmodell gibt. Also könnten zusätzliche Tableauschritte im Prinzip immer noch zum Abschluss führen, aber mit Sicherheit läßt sich das nicht sagen. Und dies ist prinzipiell so, ungeachtet wie groß die Zahl N der schon ausgeführten Tableauschritte sein mag.

Nicht in allen Fällen, wo die systematische Anwendung der Reduktionsregeln zu einer unendlichen Menge von Parametern führt und die Tableaukonstruktion somit nicht nach endlich vielen Schritten zu Ende geht, muß dies bedeuten, daß es nur unendliche Gegenmodelle gibt. Dies zeigt das folgende Beispiel.

(44)

$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \leftrightarrow Q(y))\,,\,(\exists y)\,P(y) \vDash (\exists z)\,(P(z) \wedge Q(z))$

Der erste Schritt der hier durchgeführten Tableaukonstruktion betrifft die Existenzformel auf der „wahr“-Seite. Wir reduzieren diese Formel, indem wir für die vom Existenzquantor gebundene Variable y den (neuen) Parameter a substituieren. Damit haben wir:

(45)

wahr	falsch
$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \leftrightarrow Q(y))$	$(\exists z)\,(P(z) \wedge Q(z))$
$(\exists y)\,P(y)$	
$P(a)$	
Einziger Ast	**Einziger Ast**

Unser nächster Schritt besteht darin, daß wir den Parameter a für den Existenzquantor der Formel auf der „falsch“-Seite substituieren.

Wir lösen sogleich auch die dadurch entstehende Konjunktion $P(a) \wedge Q(a)$ auf. Von den beiden Ästen, die sich dabei ergeben, schließt sich der linke.

(46)

wahr		falsch	
$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \leftrightarrow Q(y))$		$(\exists z)\,(P(z) \wedge Q(z))$	
$(\exists y)\,P(y)$			
$P(a)$			
		$P(a) \wedge Q(a)$	
		$P(a)$	$Q(a)$
Ast 1	**Ast 2**	**Ast 1**	**Ast 2**

In dem rechten Ast instanziieren wir die all-quantifizierte Formel auf der „wahr“-Seite ebenfalls mit a. Dadurch ergibt sich auf dieser Seite eine neue Existenzformel, deren Reduktion die Einführung eines neuen Parameters verlangt. Als neuen Parameter wählen wir b.

(47)

wahr	falsch
$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \leftrightarrow Q(y))$	$(\exists z)\,(P(z) \wedge Q(z))$
$(\exists y)\,P(y)$	
$P(a)$	
	$P(a) \wedge Q(a)$
	$Q(a)$
$(\exists y)\,(P(a) \leftrightarrow Q(y))$	
$P(a) \leftrightarrow Q(b)$	
Ast 2	**Ast 2**

Die Reduktion des Bikonditionals in (47) führt abermals zu einer Verzweigung in zwei Äste, von denen sich diesmal der rechte unmittelbar schließt:

(48)

wahr		falsch	
$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \leftrightarrow Q(y))$		$(\exists z)\,(P(z) \wedge Q(z))$	
$(\exists y)\,P(y)$			
$P(a)$			
		$P(a) \wedge Q(a)$	
		$Q(a)$	
$(\exists y)\,(P(a) \leftrightarrow Q(y))$			
$P(a) \leftrightarrow Q(b)$			
$P(a)$			$P(a)$
$Q(b)$			$Q(b)$
Ast 2.1	**Ast 2.2**	**Ast 2.1**	**Ast 2.2**

Wir können den neuen Parameter b wieder für den Existenzquantor unter “falsch” einsetzen. Die Reduktion der Konjunktion, die sich so ergibt, führt abermals zu zwei Ästen, von denen sich der eine schließt, während der andere offen bleibt.

(49)

<table>
<tr><th colspan="2">wahr</th><th colspan="2">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="2">$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \leftrightarrow Q(y))$
$(\exists y)\,P(y)$
$P(a)$

$(\exists y)\,(P(a) \leftrightarrow Q(y))$
$P(a) \leftrightarrow Q(b)$
$P(a)$
$Q(b)$</td><td colspan="2">$(\exists z)\,(P(z) \wedge Q(z))$

$P(a) \wedge Q(a)$
$Q(a)$

$P(b) \wedge Q(b)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$P(b)$</td><td>$Q(b)$</td></tr>
<tr><td>Ast 2.1.1</td><td>Ast 2.1.2</td><td>Ast 2.1.1</td><td>Ast 2.1.2</td></tr>
</table>

Jetzt kann der Parameter b für den All-Quantor in der „wahr"-Spalte eingesetzt werden. Es ist aber leicht einzusehen, daß uns das nicht wesentlich weiterhilft. Zwar schließen sich wieder die meisten der Äste, die bei der Weiterverarbeitung entstehen, aber auch dieses Mal bleibt einer der Äste offen. Wir zeigen das Ergebnis in (50).

(50)

<table>
<tr><th colspan="2">wahr</th><th colspan="2">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="2">$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \leftrightarrow Q(y))$
$(\exists y)\,P(y)$
$P(a)$

$(\exists y)\,(P(a) \leftrightarrow Q(y))$
$P(a) \leftrightarrow Q(b)$
$P(a)$
$Q(b)$

$(\exists y)\,(P(b) \leftrightarrow Q(y))$
$P(b) \leftrightarrow Q(c)$</td><td colspan="2">$(\exists z)\,(P(z) \wedge Q(z))$

$P(a) \wedge Q(a)$
$Q(a)$

$P(b) \wedge Q(b)$
$P(b)$</td></tr>
<tr><td>$P(b)$
$Q(c)$</td><td></td><td></td><td>$P(b)$
$Q(c)$</td></tr>
<tr><td>Ast 2.1.1.1</td><td>Ast 2.1.1.2</td><td>Ast 2.1.1.1</td><td>Ast 2.1.1.2</td></tr>
</table>

Es besteht nun abermals die Möglichkeit, den All-Quantor auf der „wahr"-Seite mit c zu instanziieren. Daraufhin erfordert die Instanziierung der entstandenen Existenzformel abermals die Einführung eines neuen Parameters. Der Konstruktionsprozess ist also immer noch nicht abgeschlossen. Aufgrund von unseren Erfahrungen beim letzten Beispiel könnte allmählich der Verdacht aufkommen, daß der noch offene Ast sich zwar nie schließen wird, aber ein unendliches Gegenbeispiel erzeugen wird. In diesem Fall läßt sich aber schon mit den endlich vielen Parametern die in das Tableau in (50) eingeführt worden sind, ein Gegenbeispiel definieren: U_M sei die Parametermenge $\{a,b,c\}$ und die Extensionen P_M und Q_M von P und Q seien (übereinstimmend mit den Vorkommen der atomaren Formeln im offenen Ast) $\{a\}$ und $\{b\}$. Also ist das Gegenmodell M durch die Bedingungen in (51) charakterisiert.

(51)

$U_M = \{a,b,c\}$
$P_M = \{a\}$
$Q_M = \{b\}$

Es ist leicht, zu verifizieren, daß die Prämissen von (44) in M wahr sind und der Schluß falsch. Es gibt also Argumente, bei denen die Tableaukonstruktion zwar bei strikter Befolgung der Konstruktionsregeln unendlich fortläuft und zur Einführung unendlich vieler Parameter führt, aber für die es dennoch endliche Gegenbeispiele (d. h. Gegenmodelle mit endlichen Universen) gibt.

Die Tableau-Regeln für die Junktoren der Aussagenlogik haben wir auf Seite 10 f. schon schematisch dargestellt. Die Regeln für die Quantoren wurden zwar beschrieben und in den Beispielstableaus angewandt, aber eine präzise Beschreibung dieser Regeln fehlt noch.

Eine genaue Beschreibung der Quantorenregeln ist auch deshalb wichtig, weil hier, wie wir gesehen haben,auf Aspekte der Regelanwendung geachtet werden muß, die in der Aussagenlogik keine Rolle spielen: Wie in unseren bisherigen Beispielsdiskussionen immer wieder betont wurde, unterscheiden sich zwei der Quantorenregeln — die Regel für all-quantifizierte Formeln auf der „wahr“-Seite und die Regel für existenz-quantifizierte Formeln auf der „falsch“-Seit — von allen anderen Reduktionsregeln dadurch, daß sie *mehrfach* auf einunddieselbe Formel angewendet werden können, und oft auch müssen.

Bevor wir uns mit diesen zwei Regeln genauer befassen, betrachten wir zuerst die beiden anderen Quantorenregeln — für existenz-quantifizierte Formeln unter „wahr“ und all-quantifizierte Formeln unter „falsch“.

Wir wiederholen unsere Überlegungen zu diesen Regeln (siehe S. 15 ff.) noch einmal.Das Vorkommen einer Existenzformel $(\exists x)A(x)$ unter „wahr“ drückt die Bedingung aus, daß diese Formel wahr sein soll. $(\exists x)A(x)$ ist aber nur dann wahr, wenn es irgendein Objekt a gibt, das die Formel $A(x)$ erfüllt. Anders gesagt: Es muß mindestens eine Aussage von der Form $A(c)$ geben, die wahr ist. Wir können also die Bedingung, daß $(\exists x)A(x)$ wahr ist, auf die Bedingung reduzieren, daß irgendeine Formel von der Form „$A(c)$“ wahr ist. Dabei ist unbekannt, welcher „Name“ c hier zu verwenden ist, denn wir wissen ja nicht, welches Objekt die Formel $A(x)$ erfüllt. Wir werden der Idee eines „Namens für ein unbekanntes Objekt“ gerecht, indem wir eine Individuenkonstante c wählen, die noch nicht im Tableau vorkommt und über deren Referenten im Tableau also noch keinerlei Ausssagen gemacht worden sind. Die Instanziierung $A(c)$ mit dieser neuen Konstante c tragen wir in die „wahr“-Spalte ein.

Die Regel für all-quantifizierte Formeln auf der „falsch“-Seite ist ähnlich. Das in der„falsch“-Spalte Vorkommen von $(\forall x)A(x)$ bedeutet daß es

irgendein Objekt a gibt, das $A(x)$ nicht erfüllt, also, wenn für irgendeine Konstante c $A(c)$ falsch ist. Auch hier erfassen wir die Intuition, daß es sich dabei um ein Objekt handelt, von dem noch nichts bekannt ist„ indem wir der „falsch“-Spalte eine Formel $A(c)$ hinzufügen, deren Konstante c bisher noch nicht im Tableau vorkam.

Es ist zu betonen, daß man die beiden gerade beschriebenen Regeln immer nur einmal auf eine gegebene Formel anzuwenden braucht — in dieser Hinsicht sind sie ähnlich zu den Regeln für die Junktoren. Denn sobald auch nur eine Formel von der Form $A(c)$ wahr ist, so folgt daraus schon, daß auch $(\exists x)A(x)$ wahr sein muß; und ist auch nur eine Formel $A(c)$ falsch, so ist auch $(\forall x)A(x)$ falsch: Die neue, durch Anwendung der Regel entstandene Bedingung garantiert, daß die alte Bedingung gelten muß: solange die Tableaukonstruktion sicherstellt, daß die neue, $A(c)$ betreffende Bedingung erfüllt ist, ist auch die alte Bedingung erfüllt. Also braucht man letztere nicht weiter zu berücksichtigen.

Für die beiden anderen Quantorenregeln gilt dies nicht. Betrachten wir zum Beispiel das Vorkommen einer Formel $(\forall x)A(x)$ unter „wahr“. Dies bedeutet, daß jedes Objekt (des betreffenden Universums) die Formel $A(x)$ erfüllen soll. Daraus folgt, daß für jeden Parameter c der Satz $A(c)$ wahr sein soll. Diese Anforderung ergibt sich auch, wenn wir die Gegenmodelle betrachten, die aus offenen Tableau-Ästen konstruierbar sein sollen. Wenn wir bei der Konstruktion eines Gegenmodells aus einem offenen Tableau-Ast so verfahren, wie wir es bis jetzt in unseren Beispielen gemacht haben, und für das Universum dieses Modells die Menge aller im betreffenden (offenen) Tableau-Ast vorkommenden Konstanten nehmen, dann muß das Modell, damit es $(\forall x)A(x)$ verifiziert, auch für eine jede solche Konstante c die Formel $A(c)$ verifizieren. Um sicherzustellen, daß dies der Fall sein wird, ist es notwendig, daß alle solchen Formeln $A(c)$ in die „wahr“-Spalte eingetragen werden. Deshalb muß immer, wenn ein neuer Parameter c eingeführt wird, die Reduktionsregel aufs Neue auf $(\forall x)A(x)$ angewandt werden, damit die entsprechende Formel $A(c)$ als Element der „wahr“-Spalte erzeugt wird.

Ähnlich ist der Fall einer Existenzformel auf der „falsch“-Seite. Damit $(\exists x)A(x)$ falsch ist, muß $A(c)$ für jeden im Tableau-Ast vorkommenden Parameter c falsch sein. Um dies sicherzustellen, muß jede Formel $A(c)$ unter „falsch“ eingetragen werden, wenn der entsprechende Parameter c in dem Tableau-Ast vorkommt. Auch hier ergibt sich also die Notwendigkeit mehrfacher Anwendungen.

(52) gibt schematische Darstellungen der vier Quantorenregeln:

(52)

(∀, W)

wahr	falsch
$(\forall v_i)A$	
$A(c/v_i)$	

(*c* beliebiger Parameter)

(∀, F)

wahr	falsch
	$(\forall v_i)A$
	$A(c/v_i)$

(*c* neuer Parameter)

(∃, W)

wahr	falsch
$(\exists v_i)A$	
$A(c/v_i)$	

(*c* neuer Parameter)

(∃, F)

wahr	falsch
	$(\exists v_i)A$
	$A(c/v_i)$

(*c* beliebiger Parameter)

Anwendungsbedingungen:

- Die Regeln (∀, F) und (∃, W)
  braucht man auf eine gegebene Formel — $(\forall v_i)A$ unter „falsch", bzw. $(\exists v_i)A$ unter „wahr"— immer nur einmal anzuwenden. Der in einer solchen Anwendung verwendete Parameter muß einer sein, der noch nicht im Tableau vorkommt.
- Die Regeln (∀, W) und (∃, F)
  können auf eine gegebene Formel — $(\forall v_i)A$ unter „wahr", bzw. $(\exists v_i)A$ unter „falsch"— beliebig oft angewandt werden, und zwar für jeden im gegebenen Tableau-Ast vorkommenden Parameter.

Die Notwendigkeit wiederholter Anwendungen der letzten beiden Regeln auf dieselbe Formel ist der Grund, weshalb Tableaukonstruktionen für Argumente mit endlich vielen Prämissen oft unendlich fortlaufen. Mit diesem Umstand hängt die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik zusamen: Es gibt kein Verfahren, das für jedes prädikatenlogische Argument in endlich vielen Schritten zu einer Entscheidung der Frage führt, ob das Argument gültig ist oder nicht.

Das Gesetz vom Ausgeschlossenen Dritten.
Wie wir gesehen haben, schließt das Tableau für das ungültige Argument (22) nicht. Hier nochmal das Tableau, zu dem die Konstruktion uns geführt hatte, und dessen linker Ast zu dem auf S. 23 definierten Gegenmodell führte:

(22)

$$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y))) \vDash (\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$$

(27)

wahr			falsch		
$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$ $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$			$(\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,$ [illegible]		
		$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$	$P(b)$ $Q(b) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,b))$		[illegible]
			$Q(b)$	$(\forall x)(P(x) \to R(x,b))$	[illegible]
Ast 1.1	**Ast 1.2**	**Ast 2**	**Ast 1.1**	**Ast 1.2**	**A**[illegible]

Aus dem Tableau-Ast, der sich in diesem Diagramm ganz links befindet, leiteten wir das Gegenbeispiel (28) ab:

(28)

$U_M = \{b\}$
$P_M = \emptyset$
$Q_M = \emptyset$
$R_M = \emptyset$

Wie wir in unserer Diskussion von (22) bemerkten, ist dieses Modell nur zum Teil vom ausgewählten Tableau-Ast festgelegt: Das Universum und die Extensionen von P und Q sind durch die Parametermenge und die Vorkommen der atomaren Formeln $P(b)$ und $Q(b)$ eindeutig bestimmt, aber über die Extension von R macht der Ast keine Aussage. Wie schon beobachtet, bedeutet dies, daß wir die Extension von R beliebig definieren können (also entweder als $\emptyset$ oder als $\{\langle b,b\rangle\}$); in beiden Fällen bekommen wir ein Modell, in dem die Prämisse von (22) wahr und der Schluß falsch ist.

Eine ähnliche Situation ergibt sich, wenn wir das Tableau für das Argument (53) konstruieren. (Wie im Skript ‘Logik und Formale Grundlagen I’ beobachtet, ist dieses Argument ungültig.)

(53)

$$p \vee (q \wedge r) \vDash (p \vee q) \wedge r$$

(54) zeigt das Tableau, nachdem alle möglichen Reduktionen durchgeführt worden sind.

(54)

<table>
<tr><th colspan="4">wahr</th><th colspan="4">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="4">$p \vee (q \wedge r)$</td><td colspan="4">$(p \vee q) \wedge r$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">p
q</td><td colspan="2">r</td></tr>
<tr><td>p
▬</td><td>$q \wedge r$
q
r
▬</td><td>p</td><td>$q \wedge r$
q
r
▬</td><td>▬</td><td>▬</td><td></td><td>▬</td></tr>
<tr><td>Ast 1.1</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td><td>Ast 1.1</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td></tr>
</table>

In diesem Tableau gibt es einen offenen Ast, und in diesem kommt p in der „wahr"-Spalte und r in der „falsch"-Spalte vor, q aber weder in der einen noch in der anderen. Diesem Sachverhalt entspricht die Tatsache, daß eine Bewertung, die die p und r auferlegten Bedingungen erfüllt — also, die p wahr und r falsch macht — die Prämisse von (53) verifiziert und den Schluß falsifiziert, ungeachtet dessen, ob sie q wahr macht oder falsch.

Der Spielraum, den uns mancher offene Tableau-Ast bei der Definition eines Gegenbeispiels läßt, ist also, wie die Beispiele zeigen, nicht weiter problematisch: Solange man das Modell innerhalb dieses Spielraums definiert, wird sich immer ein Gegenbeispiel ergeben. Dennoch sei hier kurz darauf hingewiesen, daß sich diese Art von „Unterspezifizierung" vermeiden läßt. Dazu brauchen wir aber eine zusätzliche Konstruktionsregel. Diese Regel besagt, daß man zu jeder Zeit beliebige Instanzen des „Gesetzes vom Ausgeschlossenen Dritten" unter „wahr" eintragen darf.

Das Gesetz vom Ausgeschlossenen Dritten ist das Prinzip, daß es neben den Wahrheitswerten „Wahr" und „Falsch" keine weiteren gibt. In der hier entwickelten klassischen Aussagen- und Prädikaten-Logik, in der angenommen wird, daß jede Proposition einen Wahrheitswert hat, bedeutet dies, daß jede Proposition entweder wahr oder falsch ist; und dies wiederum impliziert, daß jede Formel von der Form $A \vee \neg A$ logisch gültig ist. Denn es gibt für A nur zwei Möglichkeiten: Entweder ist A wahr, und dann ist $A \vee \neg A$ wahr aufgrund der Wahrheit des ersten Disjunkts; oder A ist falsch, aber dann ist $\neg A$ wahr und $A \vee \neg A$ wahr, weil das zweite Disjunkt wahr ist.

Da Formeln der Form $A \vee \neg A$ immer gültig sind, können wir sie der Prämissenmenge Γ eines beliebigen Arguments $\Gamma \models B$ hinzufügen, ohne die Gültigkeit des Arguments dadurch zu beeinflüssen. Denn ist $\Gamma \models B$ gültig, dann gilt dies selbstverständlich auch für das Argument $\Gamma \cup \{A \vee \neg A\} \models B$. Und ist $\Gamma \models B$ ungültig, dann gibt es ein Modell M, das die Prämissen in Γ wahr macht und den Schluß B falsch. Aber in M — wie in jedem anderen Modell — ist auch $A \vee \neg A$ wahr. Also ist M auch ein Gegenbeispiel zu $\Gamma \cup \{A \vee \neg A\} \models B$ und dieses Argument mithin auch ungültig. (Es sei nebenbei bemerkt, dass diese Überlegung nicht nur auf Formeln von der Form $A \vee \neg A$ zutrifft, sondern auf alle logisch gültigen Formeln. Das Hinzufügen einer solchen Formel zu der Prämissenmenge eines Arguments wird nie aus einem ungültigen Argument eines machen, das gültig ist.)

Durch Hinzufügung von Instanzen des Gesetzes vom Ausgeschlossenen Dritten können wir bewerkstelligen, daß ein offener Tableau-Ast für eine beliebige atomare Formel A den Wahrheitswert für A festlegt. Dazu tragen wir die Formel $A \vee \neg A$ in den Ast unter „wahr" ein. Die Reduktion der Formel führt dann zu einer Verzweigung des Astes. Von den beiden so entstandenen Ästen enthält der erste A unter „wahr", während im zweiten Ast A unter „falsch" vorkommt. Wenn wir den offenen Ast von (54) diesem Verfahren unterziehen, indem wir $q \vee \neg q$ in diesem Ast unter „wahr" eintragen, entsteht (55).

(55)

<table>
<tr><th colspan="5">wahr</th><th colspan="5">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="5">$p \vee (q \wedge r)$</td><td colspan="5">$(p \vee q) \wedge r$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td><td colspan="2">p
q</td><td colspan="3">r</td></tr>
<tr><td rowspan="2">p
▬</td><td rowspan="2">$q \wedge r$
q
r
▬</td><td colspan="2">p
$q \vee \neg q$</td><td rowspan="2">$q \wedge r$
q
r
▬</td><td rowspan="2">▬</td><td rowspan="2">▬</td><td colspan="2"></td><td rowspan="2">▬</td></tr>
<tr><td>q</td><td>$\neg q$</td><td></td><td>q</td></tr>
<tr><td>Ast 1.1</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1.1</td><td>Ast 2.1.2</td><td>Ast 2.2</td><td>Ast 1.1</td><td>Ast 1.2</td><td>Ast 2.1.1</td><td>Ast 2.1.2</td><td>Ast 2.2</td></tr>
</table>

In (55) gibt es statt einem zwei offene Äste, die jeweils ein Gegenbeispiel eindeutig bestimmen. Nach den im ersten Ast enthaltenen Bedingungen muß p wahr, r falsch und q wahr sein; den Bedingungen im zweiten Ast zufolge muß p wahr sein, und r und q beide falsch. Wie wir schon gesehen haben, sind beide Bewertungen Gegenbeispiele zu (53).

Auf ähnliche Weise können wir im linken Ast von Tableau (27) durch Hinzufügen von $R(b,b) \vee \neg R(b,b)$ unter „wahr" eine Verzweigung in zwei Äste herbeiführen, die den Wahrheitswert der Formel $R(b,b)$ und damit die Extension von R in dem zu konstruierenden Modell (mit $U_M = \{b\}$!) festlegen.

Das Prinzip, daß der Prämissenmenge eines Arguments bestimmte Formeln hinzugefügt werden können, ohne daß die Gültigkeit des Arguments davon beeinflußt wird, gilt, wie vorhin (auf S. 48) angemerkt wurde, nicht nur für Instanzen des Gesetzes vom Ausgeschlossenen Dritten, sondern für logisch gültige Formeln allgemein, und zwar aus demselben, oben erwähnten Grund: Wir werden später, bei der Behandlung der „axiomatischen" Beweismethode, von einem analogen Prinzip Gebrauch machen, nach dem jede schon bewiesene Formel als „Hilfsprämisse" in weiteren Beweisen verwendet werden darf.

Zum Abschluß dieses Abschnitts fassen wir die wichtigsten Eigenschaften der Tableaumethode für die Prädikatenlogik noch einmal kurz zusammen:

1. Die Methode ist *korrekt*: Ist das Argument nicht gültig, so kann die Tableaukonstruktion nicht zum Abschluß führen.
2. Die Methode ist *vollständig*. Ist das Argument $A_1, \ldots, A_n \vDash B$ gültig, so läßt sich dies durch die Konstruktion eines geschlossenen Tableaus nachweisen.
3. Die Methode ist *kein Entscheidungsverfahren*: Ist nach endlich vielen Konstruktionsschritten noch kein Abschluß des Tableaus erreicht worden, so kann daraus im Allgemeinen nichts über die Gültigkeit des Arguments geschlossen werden.
4. Insbesondere gibt es Argumente, für die die Tableaukonstruktion unendlich ist: Nach jeder endlichen Anzahl von Konstruktionsschhritten gibt es noch offene Tableau-Äste mit möglichen, aber noch nicht durchgeführten Reduktionen.

Es ist zu betonen, daß wir die Punkte 1.-3. nicht bewiesen haben. Die Beweise sind zum Teil schwierig (insbesondere der Beweis von 3.!). In diesem Skript wird auf ihre Darstellung verzichtet.

2.4. **Prädikatenlogik mit Identität.**

Die so weit formulierten Tableau-Regeln definieren ein vollständiges Beweisverfahren für den Prädikatenkalkül ohne Identität. Für die Prädikatenlogik mit Identität brauchen wir zwei weitere Regeln, die den logischen Eigenschaften der Identitätsrelation entsprechen. Wie diese Regeln auszusehen haben, erläutern wir wieder anhand einiger Beispiele.

Hier das erste Beispiel. Wenn der Autor der „Waverley"-Romane ein talentierter Schriftsteller ist, und Walter Scott der Autor der „Waverley"-Romane ist, so folgt, daß Walter Scott ein talentierter Schriftsteller ist — formalisiert in der Prädikatenlogik: $T(c), c = d \vDash T(d)$. Es gibt aber unter den bisher formulierten Tableau-Regeln keine, die den Abschluß dieses Tableaus herbeiführt:

(56)

wahr	**falsch**
$c = d$	$T(d)$
$T(c)$	

Es ist offensichtlich, was für eine Regel wir brauchen, um einen Abschluß herbeiführen zu können: Die Präsenz der Identitätsaussage „$c = d$" unter „wahr" soll ermöglichen, aus der Bedingung, daß die Formel $T(c)$ wahr ist, die Bedingung abzuleiten, daß auch die Formel $T(d)$ wahr ist. Denn wenn c mit d identisch ist, dann ist die Behauptung, daß c das Prädikat T erfüllt, natürlich äquivalent mit der Behauptung, daß d dieses Prädikat erfüllt. Etwas allgemeiner formuliert, wenn „$c = d$" in der Spalte „wahr" vorkommt, und die Formel A dort ebenfalls vorkommt, dann soll es möglich sein, in diese Spalte ebenfalls eine Formel A' einzutragen, die wir bekommen, wenn wir c an einer oder mehreren Stellen in A durch d ersetzen.

Mit Hilfe dieser neuen Regel kann das Tableau (56) zum Abschluß gebracht werden:

(57)

wahr	**falsch**
$c = d$	$T(d)$
$T(c)$	
$T(d)$	
▬▬▬	▬▬▬

(N. B.: Die Formel $T(d)$, die bei der Anwendung der neuen Regel unter „wahr" eingetragen wurde, ergibt sich durch Substitution von d für c an der einzigen Stelle, an der c in der schon vorhandenen Formel $T(c)$ unter „wahr" vorkommt.)

Wir können das gerade formulierte Prinzip noch etwas verallgemeinern und verschärfen. Zuerst sei bemerkt, daß wir aus „$c = d$" und der komplexen Formel „$R(a,c) \to R(b,c)$" nicht nur die Formel „$R(a,d) \to R(b,d)$", sondern ebensogut „$R(a,c) \to R(b,d)$" und „$R(a,d) \to R(b,c)$" ableiten können; wenn c und d ein und dasselbe Objekt sind, dann sagen all diese Formeln dasselbe aus. Zweitens gilt das Prinzip nicht nur für den Fall, in dem sich die Formel A links (also in der Spalte „wahr") befindet, sondern auch wenn sie rechts steht: Wenn c identisch ist mit d, dann ist die Bedingung, daß A falsch ist gleichwertig mit der Bedingung, daß A' falsch ist.

Die Version der Tableau-Regel, die wir jetzt formulieren, trägt beiden Verallgemeinerungen Rechnung. Wir präsentieren die Regel in der schon bekannten schematischen Form; die schematische Darstellung umfaßt zwei Fälle, einen, in dem A links, und einen, in dem A rechts steht:

(58)

wahr	**falsch**
$c = d$ A	
A'	

wahr	**falsch**
$c = d$	A
	A'

(=, Subst) (Subst = Substitution)

Zusätzlich zu dieser Regel brauchen wir noch eine zweite Identitätsregel. Die gerade formulierte Identitätsregel ist nur dann anwendbar, wenn eine Formel „$c = d$" schon auf derr „wahr"-Seite vorkommt. Deshalb ist sie nicht in der Lage, die Reflexivität der Identität, also die Gültigkeit der Formel $(\forall x)(x = x)$ nachzuweisen. Mit (58) und den uns sonst verfügbaren Tableauregeln läßt gelingt dies aber. Wir brauchen eine weitere Regel, und zwar eine, die besagt, daß jede Formel von der Form „$c = c$" wahr sein muß. Die einfachste Version einer solchen Regel ist wohl die, nach der jede Formel „$c = c$" ohne weitere Begründung in die „wahr"-Spalte beliebiger Tableau-Äste eingetragen werden darf. Schematisch können wir diese Regel wie in (59) darstellen:

(59)

wahr	**falsch**
$c = c$	

(=, Ref) (Ref = Reflexivität)

Bei Verwendung der Regel (=, Ref) **[**= (59)**]** wird der Nachweis, daß $(\forall x)(x = x)$

gültig ist, trivial. Nachdem der erste Schritt (Instanziierung des All-Quantors durch einen neuen Parameter) zu (60) führt,

(60)

wahr	**falsch**
	$(\forall x)(x = x)$ $a = a$

erlaubt uns die neue Identitätsregel die Formel „$a = a$" auf der „wahr"-Seite einzutragen. Damit erfolgt der Abschluß des Tableaus:

(61)

wahr	**falsch**
	$(\forall x)(x = x)$
	$a = a$
$a = a$	

Die beiden Identitätsregeln ermöglichen insbesondere die Verifikation von zwei weiteren salienten Eigenschaften der Identität, Symmetrie und Transitivität. Das heißt, wir können mit Hilfe der Tableaumethode die logische Gültigkeit der folgenden beiden „Argumente" nachweisen:

(62)

$\vDash (\forall x)(\forall y)(x = y \to y = x)$

(63)

$\vDash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \wedge y = z \to x = z)$

Das Tableau für (62) ergibt sich wie folgt:

(64)

wahr	**falsch**
	$(\forall x)\,(\forall y)\,(x=y\rightarrow y=x)$
	$a=b\rightarrow b=a$
$a=b$	$b=a$
(i) $a=a$	
(ii) $b=a$	

Hier ist (i) durch die gerade formulierte Regel (=, Ref) gerechtfertigt, während (ii) sich durch die Regel (=, Subst) aus (i) und „$a=b$“ ergibt.

Der Beweis von (63) ist dem Leser überlassen.

2.5. **Gegenmodelle für Argumente der Prädikatenlogik mit Identität.**

Vorkommen von Identitätsformeln verursachen eine gewisse Komplikation in der Definition von Gegenmodellen. Bisher war es möglich, das Universum eines Modells M, das auf der Basis eines offenen Tableau-Astes konstruiert wurde, immer als die Menge der im Ast vorkommenden Parameter zu definieren. Die Parameter spielten dabei im Modell M die Rolle von Individuen — Individuen, die sie, in ihrer Funktion als Individuenkonstanten, selbst bezeichneten.

Sobald Identitätsformeln im Tableau-Ast vorkommen, lässt sich das Universum eines Gegenmodells im Allgemeinen nicht länger auf diese einfache Weise spezifizieren. Denn nehmen wir an, eine Identitätsformel, etwa $c=d$, komme in der „WahrSpalte eines offenen Tableau-Astes A vor. Dann müssen in einem auf A basierenden Modell c und d dasselbe Objekt bezeichnen; denn sonst würde das Modell $c=d$ falsifizieren. Würden wir bei der Modellkonstruktion so verfahren wie bisher, dann würden c und d verschiedene Objekte bezeichnen (nämlich jeweils sich selbst), und „$c=d$“ wäre falsch.

Um dies zu vermeiden, verfahren wir wie folgt. In dem aus einem offenen Ast A abgeleiteten Modell sollen die Individuenkonstanten nicht länger sich selbst bezeichnen, sondern bestimmte Mengen von Konstanten, denen sie selbst als Elemente angehören. Kommt z. B. „$c=d$“ unter „wahr“ vor, dann haben c und d beide dieselbe Menge zu bezeichnen — also eine, die beide Konstanten enthält. Wir definieren diese Mengen als Äquivalenklassen, die durch die unten definierte Äquivalenzbeziehung R_A erzeugt werden. Diese Beziehung muß stets dann (aber vielleicht nicht *nur* dann!) zwischen zwei Konstanten c und d gelten, wenn die Formel $c=d$ im Tableau-Ast A unter „wahr“ vorkommt.

Wäre nun bereits diejenige Beziehung, die *genau* dann (also stets dann *und* nur dann) zwischen zwei im Ast vorkommenden Parametern c und d besteht, wenn „$c=d$„ in der „wahr“-Spalte vorkommt, selbst eine Äquivalenzbeziehung, so könnten wir U_M als die Menge der von dieser Beziehung erzeugten Äquivalenzklassen definieren und damit wäre unser Problem gelöst. Bei Tableaus, die nach dem bisherigen Verfahren konstruiert werden, wird diese Beziehung aber im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation zu sein. Dies sehen wir am folgenden Beispiel, in dem wir mit der schon erprobten Methode ein Tableau für das ungültige Argument (65) konstruieren.

(65)

$(\forall y)\,(\exists z)\,(P(z)\wedge y=z)\models(\exists y)\,Q(y)$

(Daß (65) ungültig ist, ist offensichtlich. Denn der Schluß besagt, daß es etwas gibt, das die Eigenschaft Q besitzt, während die Prämisse eine etwas abstruse Formulierung der Bedingung ist, daß alle Objekte die Eigenschaft P haben. Die zweite Behauptung hat mit der ersten nichts zu tun, kann ihre Wahrheit nicht garantieren.)

(66)

wahr	**falsch**
$(\forall y)\,(\exists z)\,(P(z)\wedge y=z)$	$(\exists y)\,Q(y)$
	$Q(a)$
$(\exists z)\,(P(z)\wedge a=z)$	
$(P(b)\wedge a=b)$	
$P(b)$	
$a=b$	
$(\exists z)\,(P(z)\wedge b=z)$	
$P(c)\wedge b=c$	
$P(c)$	
$b=c$	

Die Konstruktionsmöglichkeiten sind hiermit noch nicht erschöpft, denn wir können den All-Quantor noch einmal mit dem Parameter c instanziieren. Für den Existenzquantor der so entstandenen Existenzformel muß dann wieder ein neuer Parameter (z. B. d) eingeführt werden, der dann wieder für den All-Quantor der Prämisse eingesetzt werden kann, usw. Es ist aber intuitiv klar, daß wir, indem wir so weitermachen, das Tableau nicht zum Abschluß bringen werden. Andererseits ist der Punkt, um den es hier geht, schon jetzt deutlich erkennbar, und von der angedeuteten Weiterführung der Konstruktion ist er unbeeinflusst: Definieren wir, für beliebige Tableau-Äste A die Relation R_A wie in $(*)$:

(∗) $c\ R_A\ d \quad \equiv_{df.}$ die Formel „$c = d$“ kommt im Tableau-Ast A unter „wahr“ vor

dann ist diese Relation R_A im Fall von (66) keine Äquivalenzrelation. Damit sie eine wäre, müßten außer den Gleichungen $a = b$ und $b = c$ auch noch $a = a$, $b = b$, $c = c$, $b = a$, $c = b$ und $c = a$ unter „wahr“ vorkommen.

In dieser Hinsicht ist (66) keine Ausnahme, sondern die Regel. Nur in relativ seltenen Fällen führt das bisher von uns verwendete Konstruktionsverfahren zu Tableau-Ästen A, für die die Relation R_A alle Eigenschaften einer Äquivalenzbeziehung besitzt.

Es ist aber möglich, das Konstruktionsverfahren so zu modifizieren, daß die mit den Ästen A assoziierten Relationen R_A immer Äquivalenzbeziehungen werden. Dazu machen wir von der Beobachtung auf S. 41–44 Gebrauch, daß wir unter „wahr“ während der Tableaukonstruktion beliebige Formeln eintragen dürfen, die logisch gültig sind. Zwar werden solche Hinzufügungen neue Reduktionen erforderlich machen und deshalb zuletzt zusätzliche atomaren Formeln im betreffenden Tableau-Ast erzeugen. Aber wie wir gesehen haben, besteht keine Gefahr, daß dies zu einem falschen Ergebnis führt: Der Tableau-Ast, in den die logisch gültigen Formeln auf der „wahr“-Seite hinzugefügt werden, sind, schließt nur dann, wenn sich der Abschluß auch ohne diese Hinzufügungen ergeben hätte.

Wir können von der Möglichkeit solcher Hinzufügungen dahingehend Gebrauch machen, daß wir gewisse Instanzen der (logisch gültigen) Symmetrie- und Transitivitäts-Gesetze der Identität unter „wahr“ eintragen. Auf diese Weise können wir sicherstellen, daß, wenn „$a = b$“ unter „wahr“ vorkommt, dies auch für „$b = a$“ der Fall sein wird, und daß das Unter-„wahr“-Vorkommen von „$a = b$“ und „$b = c$“ das dortige Vorkommen von „$a = c$“ impliziert. Überdies erlaubt uns die Regel (=, Ref) ((59)), beliebige Formeln von der Form „$a = a$“ auf der „wahr“-Seite einzutragen. So kann dafür gesorgt werden, daß die Relation R_A nicht nur szmmetrisch und transitiv, sondern auch reflexiv ist.

Wir zeigen dies explizit für den Fall von (66).

(67)

<table>
<tr><th colspan="6">wahr</th><th colspan="6">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="6">$(\forall y)\,(\exists z)\,(P(z) \land y = z)$

$(\exists z)\,(P(z) \land a = z)$
$(P(b) \land a = b)$
$P(b)$

$a = b$
$(\exists z)\,(P(z) \land b = z)$

$P(c) \land b = c$
$P(c)$
$b = c$

$a = a$
$b = b$
$c = c$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(x = y \to y = x)$
$a = b \to b = a$</td><td colspan="6">$(\exists y)\,Q(y)$
$Q(a)$</td></tr>
<tr><td>▬</td><td colspan="5">$b = a$
(Fortsetzung auf nächster Seite)</td><td>$b = a$
▬</td><td colspan="5">(Fortsetzung auf nächster Seite)</td></tr>
<tr><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2.1**</td><td>**Ast 2.2.1.1**</td><td>**Ast 2.2.1.2**</td><td>**Ast 2.2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.2**</td><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2.1**</td><td>**Ast 2.2.1.1**</td><td>**Ast 2.2.1.2**</td><td>**Ast 2.2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.2**</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="6">wahr</th><th colspan="6">falsch</th></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="5">(Fortsetzung von voriger Seite)
$b = c \to c = b$</td><td rowspan="5"></td><td colspan="5">(Fortsetzung von voriger Seite)</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="4">$c = b$
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x = y \land y = z \to x = z)$
$a = b \land b = c \to a = c$</td><td rowspan="4">$b = c$</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">$a = c$
$a = c \to c = a$</td><td colspan="2">$a = b \land b = c$</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$a = b$</td><td rowspan="2">$b = c$</td></tr>
<tr><td></td><td>$c = a$</td><td>$a = c$</td><td></td></tr>
<tr><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2.1**</td><td>**Ast 2.2.1.1**</td><td>**Ast 2.2.1.2**</td><td>**Ast 2.2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.2**</td><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2.1**</td><td>**Ast 2.2.1.1**</td><td>**Ast 2.2.1.2**</td><td>**Ast 2.2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.2**</td></tr>
</table>

Wenn wir die Definition (*) auf die Menge der Gleichungen in Ast 2.2.2.2 anwenden, ergibt sich in der Tat eine Äquivalenzbeziehung. Offensichtlich ist es möglich, jeden offenen Ast durch Anwendung von (=,Ref) und Hinzufügen von Instanzen der Symmetrie- und Transitivitätsgesetze in einen zu verwandeln, in dem die Menge der links vorkommenden Gleichungen zu einer Äquivalenzbeziehung R_A führt.

Wir werden jetzt immer stillschweigend annehmen, dass jeder offene Tableau-Ast in diesem Sinne "vervollständigt" ist, und dass Gegenmodelle aus solchen "vervollständigten Ästen konstruiert werden.

In dem vorliegenden Fall generiert die Äquivalenzbeziehung genau eine Äquivalenzklasse $\{a,b,c\}$. Das bedeutet, daß das Universum des Modells M, zu dem der Ast 2.2.2.2 führt, aus nur einem Element — eben dieser einen Äquivalenzklasse — besteht: $U_M = \{\{a,b,c\}\}$. Die Extensionen der Prädikate können nun allgemein nach dem folgenden Prinzip definiert werden: Kommt die Formel $P^n(a_1,\ldots,a_n)$ im gewählten Ast unter „wahr" vor und gehören die Parameter $a_1,\ldots,a_n$ den Äquivalenzklassen $A_1,\ldots,A_n$ an, dann (und nur dann)

gehört das Tupel $\langle A_1,\ldots,A_n\rangle$ zur Extension des Prädikats. Für das Modell M, das wir aus dem Ast 2.2.2.2 konstruieren, bedeutet dies, daß $P_M =$

$\{\{a,b,c\}\}$ und $Q_M = \emptyset$. Es läßt sich leicht verifizieren, daß in diesem Modell die Prämisse von (65) wahr ist und der Schluß falsch.

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß die Tableaukonstruktion in (66) strikt gesprochen noch nicht zuende ist (und dasselbe gilt für (67)), weil der All-Quantor der Prämisse noch nicht mit dem Parameter c instanziiert ist. Führt man diesen weiteren Instanzierungsschritt durch, dann erfordert die Reduktion der dadurch entstandenen Existenzformel die Einführung eines zusätzlichen neuen Parameters, der dann wieder für die all-quantifizierte Variable x eingesetzt werden muß, und so fort *ad infinitum*. Im vorliegenden Fall bedeutet das aber nicht (im Gegensatz zu dem oben diskutierten Fall (30)), daß so ein unendliches Gegenmodell erzeugt wird; denn alle neu eingeführten Parameter sind durch die auf der „wahr"-Seite auftretenden Identitätssätze miteinander verbunden und müssen als Namen einunddesselben Objekts gedeutet werden. Mit anderen Worten, alle Parameter gehören derselben durch R_A erzeugten Äquivalenzklasse an. Wie lange wir die Tableaukonstruktion auch fortsetzen, das Universum des Modells, das der bis dahin erreichte offene (jedoch strikt gesprochen noch unvollständige) Tableau-Ast bestimmt, wird aus nur einem Element bestehen. Dieses Element selbst — die Menge aller im Ast vorkommenden Parameter — wächst zwar ständig, aber das Universum enthält immer nur die eine Menge als einziges Element, bleibt also eine Einermenge.

Die Eigenschaften der Tableau-Methode, die wir zum Schluß des letzten Abschnitts zusammengefaßt haben, werden von der Erweiterung der Methode auf den Prädikatenkalkül mit Identität (unter Hinzunahme der Regeln (=, Subst) **[= (58)]** und (=, Ref) **[= (59)]**) nicht berührt. Die Methode der semantischen Tableaus ist also auch für den Prädikatenkalkül mit Identität:

1. korrekt — wenn das Argument nicht gültig ist, kommt das Tableau nicht zum Abschluß;
2. vollständig — für jedes gültige Argument des Kalküls läßt sich das Tableau in endlich vielen Schritten zum Abschluß bringen
3. kein Entscheidungsverfahren. Dies ergibt sich direkt aus dem Umstand, daß die Methode schon für den Prädikatenkalkül ohne = kein Entscheidungsverfahren ist. (Denn hätte man ein Entscheidungsverfahren für den Prädikatenkalkül mit Identität, so würde man insbesondere auch immer in endlich vielen Schritten eine Antwort auf die Frage nach der Gültigkeit eines Arguments bekommen, das (zufällig) die Identität nicht enthält. Und damit hätte man also ein Entscheidungsverfahren für die Prädikatenkalkül ohne Identität.

2.6. **Prädikatenlogik mit Identität und Funktionskonstanten.**

Zuletzt kommen wir zur Prädikatenlogik mit Identität und Funktionskonstanten beliebiger Stelligkeit. Die Hinzunahme von Funktionskonstanten mit Stelligkeiten > 0 erfordert keine eigentliche Erweiterung unseres Regelsystems. Der einzige Unterschied zum bisherigen Regelsystem (für die Tableaukonstruktion für Argumente in der Prädikatenlogik mit Identität aber ohne Funktionskonstanten) besteht darin, daß einige der alten Regeln jetzt einer verallgemeinerten Formulierung bedürfen. Die betroffenen Regeln sind

(i) die Quantorenregeln ($\forall$, W) und ($\exists$, F) und

(ii) die Identitätsregeln ($=$, Subst) und ($=$, Ref) .

In der bisherigen Formulierung der Quantorenregeln ist von „Parametern" (oder, was ja dasselbe ist, Individuenkonstanten) die Rede, die bei Anwendungen der Regel für Variablen zu substituieren sind. Bei der Regel ($=$, Subst) geht es um die Ersetzung einer Konstante durch eine andere. Und bei ($=$, Ref) geht es um das Hinzufügen von Sätzen der Form $c = c$, in denen links und rechts von $=$ derselbe Parameter steht. Für den Prädikatenkalkül mit Funktionskonstanten reichen diese Formulierungen nicht aus. Betrachten wir beispielsweise die Regel ($\forall$, W). Wir haben gesehen, daß diese Regel beliebig oft auf ein und dieselbe Formel $(\forall x)\, A(x)$ angewandt werden kann und, wenn möglich, muß. Denn $(\forall x)\, A(x)$ ist nur dann wahr (in dem Model Ml, das wir mit Hilfe unseres Tableaus zu bestimmen versuchen), wenn alle Instanzen $A(d)$ wahr sind, wobei d Name eines beliebigen Objekts in diesem Modell ist. Bisher waren die einzigen verfügbaren „Objektnamen" die Individuenkonstanten. Unter diesen Bedingungen kann man der Intuition, die der Regel zugrunde liegt, gerecht werden, indem man nur solche „Objektnamen" für x in $A(x)$ substituiert.

Sobald unsere prädikatenlogische Sprache aber auch Funktoren enthält, haben wir es neben diesen „atomaren Objektnamen" auch mit „komplexen Objektnamen", d. h. mit komplexen geschlossenen Termen zu tun. Ist zum Beispiel a eine Individuenkonstante und f eine einstellige Funktionskonstante, dann bezeichnen auch die Terme $f(a)$, $f(f(a))$, $f(f(f(a)))$, $\ldots$ Objekte. Soll $(\forall x)\, A(x)$ im Modell M wahr sein, dann muß sichergestellt werden, daß $A(x)$ auch für die von solchen „komplexen Namen" bezeichneten Objekte gilt. Also muß die Regel ($\forall$, W) jetzt so formuliert werden, daß sie auch die Instanziierung komplexer Terme für die vom All-Quantor gebundene Variable erlaubt.

Daß eine solche Neuformulierung der Regel ($\forall$, W) in der Tat notwendig ist, zeigt folgendes Beispiel.

(68)

$$(\forall x)\,(P(x) \to P(f(x)) \vee P(g(x))) \models$$
$$(\forall x)\,(P(x) \to P(f(f(x))) \vee P(g(f(x))) \vee P(f(g(x))) \vee P(g(g(x))))$$

(Eine Interpretation dieses Arguments ist folgende: „$P(x)$" bedeutet „x hat braune Augen", $f(x)$ ist der Vater von x und $g(x)$ die Mutter von x. Dann besagt die Prämisse, daß jeder, der braune Augen hat, entweder einen Vater mit braunen Augen oder eine Mutter mit braunen Augen hat, und der Schluß besagt, daß, wenn jemand braune Augen hat, dieses entweder für einen seiner beiden Großväter oder für eine seiner beiden Großmütter der Fall sein muß. Diese Interpretation der in (68) vorkommenden Prädikate und Funktoren sollte es leichter machen, zu erkennen, daß das Argument gültig ist.)

(69) zeigt den Anfang einer Tableaukonstruktion für (68). In der dort gezeigten Tableaukonstruktion wurden soweit nur die Regeln angewandt, wie wir sie bis zum Ende des letzten Abschnitts formuliert hatten.

(69)

<table>
<tr><th colspan="3">wahr</th><th colspan="3">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="3">$(\forall x)(P(x) \to P(f(x)) \vee P(g(x)))$

$P(a)$

$P(a) \to P(f(a)) \vee P(g(a))$</td><td colspan="3">$(\forall x) \begin{pmatrix} P(x) \to P(f(f(x))) \\ \vee P(g(f(x))) \\ \vee P(f(g(x))) \\ \vee P(g(g(x))) \end{pmatrix}$
$\begin{bmatrix} P(a) \to P(f(f(a))) \\ \vee P(g(f(a))) \\ \vee P(f(g(a))) \\ \vee P(g(g(a))) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} P(f(f(a))) \\ \vee P(g(f(a))) \\ \vee P(f(g(a))) \\ \vee P(g(g(a))) \end{bmatrix}$
$P(f(f(a)))$
$P(g(f(a)))$
$P(f(g(a)))$
$P(g(g(a)))$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">$P(f(a)) \vee P(g(a))$</td><td rowspan="2">$P(a)$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$P(f(a))$</td><td>$P(g(a))$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2.1**</td><td>**Ast 2.2**</td><td>**Ast 1**</td><td>**Ast 2.1**</td><td>**Ast 2.2**</td></tr>
</table>

Mit (69) ist aber ein Punkt der Tableaukonstruktion erreicht worden, an dem die bisherigen Regeln uns nicht weiterhelfen. Damit wir in den beiden noch offenen Ästen einen Abschluß erreichen, müssen wir die Regel (∀, W) abermals auf die Prämisse von (68) anwenden — einmal im Ast 2.1 und einmal im Ast 2.2, und zwar so, daß wir für x im Ast 2.1 $f(a)$ und im Ast 2.2 $g(a)$ einsetzen. Auf diese Weise bringen wir auch diese Äste zum Abschluß. Dies ist im Diagramm (70) gezeigt (in dem wir nur die noch offenen Äste von (69) aufgeführt haben).

(70)

<table>
<tr><th colspan="6">wahr</th><th colspan="6">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="6">$(\forall x)(P(x) \to P(f(x)) \vee P(g(x)))$

$P(a)$

$P(a) \to P(f(a)) \vee P(g(a))$
$P(f(a)) \vee P(g(a))$</td><td colspan="6">$(\forall x) \begin{pmatrix} P(x) \to P(f(f(x))) \\ \vee P(g(f(x))) \\ \vee P(f(g(x))) \\ \vee P(g(g(x))) \end{pmatrix}$
$\begin{bmatrix} P(a) \to P(f(f(a))) \\ \vee P(g(f(a))) \\ \vee P(f(g(a))) \\ \vee P(g(g(a))) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} P(f(f(a))) \\ \vee P(g(f(a))) \\ \vee P(f(g(a))) \\ \vee P(g(g(a))) \end{bmatrix}$
$P(f(f(a)))$
$P(g(f(a)))$
$P(f(g(a)))$
$P(g(g(a)))$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$P(f(a))$
(Fortsetzung auf nächster Seite)</td><td colspan="3">$P(g(a))$
(Fortsetzung auf nächster Seite)</td><td colspan="3">(Fortsetzung auf nächster Seite)</td><td colspan="3">(Fortsetzung auf nächster Seite)</td></tr>
<tr><td>**Ast 2.1.1**</td><td>**Ast 2.1.2.1**</td><td>**Ast 2.1.2.2**</td><td>**Ast 2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.2**</td><td>**Ast 2.1.1**</td><td>**Ast 2.1.2.1**</td><td>**Ast 2.1.2.2**</td><td>**Ast 2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.1**</td><td>**Ast 2.2.2.2**</td></tr>
</table>

wahr						**falsch**					
(Fortsetzung von voriger Seite) $\begin{bmatrix} P(f(a)) \\ \to \\ P(f(f(a))) \\ \vee \\ P(g(f(a))) \end{bmatrix}$			(Fortsetzung von voriger Seite) $\begin{bmatrix} P(g(a)) \\ \to \\ P(f(g(a))) \\ \vee \\ P(g(g(a))) \end{bmatrix}$			(Fortsetzung von voriger Seite)			(Fortsetzung von voriger Seite)		
▬	$\begin{bmatrix} P(f(f(a))) \\ \vee \\ P(g(f(a))) \end{bmatrix}$		▬	$\begin{bmatrix} P(f(g(a))) \\ \vee \\ P(g(g(a))) \end{bmatrix}$		$P(f(a))$ ▬			$P(g(a))$ ▬		
	$P(f(f(a)))$ ▬	$P(f(g(a)))$ ▬		$P(g(f(a)))$ ▬	$P(g(g(a)))$ ▬		▬	▬		▬	▬
Ast 2.1.1	**Ast 2.1.2.1**	**Ast 2.1.2.2**	**Ast 2.2.1**	**Ast 2.2.2.1**	**Ast 2.2.2.2**	**Ast 2.1.1**	**Ast 2.1.2.1**	**Ast 2.1.2.2**	**Ast 2.2.1**	**Ast 2.2.2.1**	**Ast 2.2.2.2**

Für die neue Formulierung der Regel(∀, W), welche die Anwendungen von (70) rechtfertigt, brauchen wir den Begriff eines *geschlossenen Terms*.[3] Wir erinnern nochmal an die Definition des Begriffs eines *Terms* der Prädikatenlogik mit Funktionskonstanten wurde schon definiert, als der Begriff einer Funktionskonstante eingeführt wurde. (Siehe das Skript Logik & Formale Grundlagen I.) Wir erinnern noch einmal an die dort gegebene Definition:

Definition 1.

[3]Wir werden diesen Begriff ebenso bei der Neuformulierung der drei anderen auf S. 45 erwähnten Regeln verwenden.

(i) Eine Variable ist ein *Term*.

(ii) Eine Individuenkonstante ist ein *Term*.

(iii) Wenn f eine n-stellige Funktionskonstante ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein *Term*.

Die *geschlossenen* Terme sind nun diejenigen Terme, die Objekte unabhängig von der gewählten Variablenbelegung bezeichnen. Dies sind genau die Terme, die keine Variablen enthalten. Also können wir definieren:

Definition 2. Ein *geschlossener Term* ist ein Term, der keine Variablen enthält.

Die Neuformulierung der Regel (∀, W) ist jetzt klar:

Kommt die Formel $(\forall x) A(x)$ unter „wahr“ vor, und ist t ein geschlossener Term, dann ist auch die Formel $A(t)$ unter „wahr“ einzutragen, wobei $A(t)$ das Ergebnis ist, das man erhält, wenn in A alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Ähnliche Änderungen sind für die drei anderen oben erwähnten Regeln nötig. An den nächsten beiden Beispielen wird dies für die Identitätsregeln (=, Subst) und (=, Ref), gezeigt.

Bevor wir uns mit diesen Beispielen selbst befassen, definieren wir zuerst den Begriff eines *Zyklus* (einer einstelligen Funktion), der in den Beispielen eine entscheidende Rolle spielt.

Definition 3. Sei F eine einstellige Funktion mit Definitionsbereich U und Wertebereich $\subseteq U$.

Ein *Zyklus von F der Länge n* ist eine Menge von n Elementen $a_1, \ldots, a_n$ im Definitionsbereich von F, für die gilt:

(i) Für $i = 1, \ldots, n-1$ ist $F(a_i) = a_{i+1}$.

(ii) $F(a_n) = a_1$

F heißt zyklisch (mit Periodizität n), wenn jedes Element a im Argumentbereich von F einem F-Zyklus (der Länge n) angehört.

(Insbesondere ist also die Identitätsfunktion auf einer Menge X eine Funktion mit Argumentbereich X, die zyklisch mit Periodizität 1 ist (und zwar ist sie die einzige solche Funktion)).

Im allgemeinen gilt: Ist F zyklisch mit Periodizität n und ebenfalls zyklisch mit Periodizität m, dann ist F auch zyklisch mit Periodizität k, wobei k der größte gemeinsame Teiler von n und m ist. Ein besonderer Fall davon ist der, in dem n und m keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben. In dem Fall ist F die Identität (auf seinem Argumentbereich). Ebenfalls gilt: Ist F zyklisch mit Periodizität k und ist n durch k teilbar, dann ist F zyklisch mit Periodizität n.

Unser erstes Beispiel zeigt, daß es notwendig ist, die Regel (=, Subst) **[= (58)]** neu zu formulieren. Wir betrachten den Fall einer Funktion, die sowohl zyklisch mit Periodizität 5 als auch zyklisch mit Periodizität 7 ist — also: $n = 5$, $m = 7$. Wenn wir annehmen, daß F eine Funktion ist, deren Definitionsbereich das ganze Universum umfaßt, dann lassen sich die Annahmen, daß F zyklisch mit Periodizität 5 und zyklisch mit Periodizität 7 ist, wie folgt in der Prädikatenlogik ausdrücken:

(71) $$(\forall x)\, f(f(f(f(f(x))))) = x$$

(72) [4] $$(\forall x)\, f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$$

Aus den obigen Beobachtungen über Zyklen folgt, daß das Argument

(73)
(71), (72) $\models (\forall x)\, f(x) = x$

gültig ist. Wir wollen die Gültigkeit durch Konstruktion eines geschlossenen Tableaus beweisen. (74) ist die Ausgangssituation für die Tableaukonstruktion.

(74)

wahr	falsch
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(x))))) = x$	$(\forall x)\, f(x) = x$
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	

Wir starten die Konstruktion mit einer Instanziierung der $\forall$-Formel auf der rechten Seite. Dabei führen wir den neuen Parameter a ein. Anschließend instanziieren wir die beiden $\forall$-Formeln auf der linken Seite mit a:

(75)

wahr	falsch
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(x))))) = x$	$(\forall x)\, f(x) = x$
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	
	$f(a) = a$
$f(f(f(f(f(a))))) = a$	
$f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a$	

Wir können nun die Regel (=, Subst) anwenden, indem wir „$f(f(f(f(f(a))))) = a$“ als die für die Regel notwendige Identität und „$f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a$“ als die Formel A betrachten, in der wir den Teilterm $f(f(f(f(f(a)))))$ des Terms „$f(f(f(f(f(f(f(a)))))))$“ durch „a“ ersetzen. Die Formel A', die sich daraus ergibt, ist „$f(f(a)) = a$“:

(76)

wahr	falsch
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(x))))) = x$	$(\forall x)\, f(x) = x$
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	
	$f(a) = a$
$f(f(f(f(f(a))))) = a$	
$f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a$	
$f(f(a)) = a$	

Wir können nun die neue Formel „$f(f(a)) = a$“ als Identität in einer weiteren Anwendung von (=, Subst) verwenden, in der jetzt „$f(f(f(f(f(a))))) = a$“ die Rolle der Formel A spielt. Die Ersetzung von $f(f(a))$ durch a in dieser Formel ergibt „$f(f(f(a))) = a$“. Eine dritte Anwendung der Regel, in der wir $f(f(a))$ in dieser letzten Formel durch a ersetzen, ergibt „$f(a) = a$“ auf der „wahr“-Seite, und damit kommt das Tableau zum Abschluß:

(77)

wahr	falsch
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(x))))) = x$	$(\forall x)\, f(x) = x$
$(\forall x)\, f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = x$	
	$f(a) = a$
$f(f(f(f(f(a))))) = a$	
$f(f(f(f(f(f(f(a))))))) = a$	
$f(f(a)) = a$	
$f(f(f(a))) = a$	
$f(a) = a$	

Die zweite Beobachtung, die wir oben über Zyklizität gemacht haben, illustrieren wir an dem Fall, daß $k = 2$ und $n = 4$ ist. Wir betrachten also das Argument

(78)

$(\forall x)\, f(f(x)) = x \vDash (\forall x)\, f(f(f(f(x)))) = x.$

Das Tableau sieht, nachdem man die Quantorenformeln reduziert hat, etwa so aus:

(79)

wahr	falsch
$(\forall x)\, f(f(x)) = x$	$(\forall x)\, f(f(f(f(x)))) = x$
	$f(f(f(f(a)))) = a$
$f(f(a)) = a$	

Den Abschluß des Tableaus erreichen wir, indem wir die Formel „$f(f(a)) = a$“ als Identität und die Formel „$f(f(f(f(a)))) = a$“ auf der rechten Seite als Formel A verwenden. Die Ersetzung des Teilterms $f(f(a))$ durch a in dieser Formel ergibt auf der rechten Seite die Formel „$f(f(a)) = a$“ und damit den Tableauabschluß:

(80)

wahr	falsch
$(\forall x)\, f(f(x)) = x$	$(\forall x)\, f(f(f(f(x)))) = x$
	$f(f(f(f(a)))) = a$
$f(f(a)) = a$	
	$f(f(a)) = a$

Eine auf den ersten Blick triviale Variante des letzten Arguments erhalten wir, indem wir in Prämisse und Schluß die Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen vertauschen:

(81)

$(\forall x)\, x = f(f(x)) \vDash (\forall x)\, x = f(f(f(f(x))))$

Nehmen wir an, die Tableaukonstruktion hat den Punkt erreicht, der in (82) gezeigt wird.

(82)

wahr	falsch
$(\forall x)\, x = f(f(x))$	$(\forall x)\, x = f(f(f(f(x))))$
	$a = f(f(f(f(a))))$
$a = f(f(a))$	

Wie sollen wir weitermachen? Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, (82) zum Abschluß zu bringen. Die erste besteht darin, daß wir die Gleichung auf der linken Seite wieder umdrehen. Das können wir dadurch erreichen, daß wir zuerst die Regel (=, Ref) anwenden, indem wir links die Formel „$a = a$“ eintragen, und anschließend die Formel „$a = a$“ als Formel A in einer Anwendung von (=, Subst) einsetzen, die „$a = f(f(a))$“ als Identität verwendet und das erste Vorkommen von a in „$a = a$“ durch $f(f(a))$ ersetzt. Danach verfahren wir dann wie in der Tableaukonstruktion für (78):

(83)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\, x = f(f(x))$	$(\forall x)\, x = f(f(f(f(x))))$
	$a = f(f(f(f(a))))$
$a = f(f(a))$	
$a = a$	
$f(f(a)) = a$	
	$a = f(f(a))$

Die zweite Möglichkeit besteht darin, daß wir die Regel (=, Subst) direkt anwenden und dabei die Formel „$a = f(f(a))$“ eine doppelte Rolle spielen lassen — einerseits die der Identität und andererseits die der Formel *A*: In ihrer Rolle als Identität erlaubt es die Formel, in ihr selbst (in ihrer Rolle *A*) den Teilterm „a“ auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen durch „$f(f(a))$“ zu ersetzen. So erhalten wir auf der „wahr“-Seite die Formel „$a = f(f(f(f(a))))$“ und damit schließt sich das Tableau:

(84)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\, x = f(f(x))$	$(\forall x)\, x = f(f(f(f(x))))$
	$a = f(f(f(f(a))))$
$a = f(f(a))$	
$a = f(f(f(f(a))))$	

Eine dritte Möglichkeit ergibt die bisher noch nicht benutzte Option, die Regel (=, Ref) **[=** (59)**]** in ihrer erweiterten Formulierung anzuwenden, die es erlaubt, Formeln der Form „$t = t$“ für beliebige (auch komplexe) Terme t in die „wahr“einzutragen. Insbesondere erlaubt diese Erweiterung von (=, Ref) das Hinzufügen von „$f(f(a)) = f(f(a))$“ auf der „wahr“-Seite von (82). Wir können diese Formel nun als die Formel A in einer Anwendung von (=, Subst) verwenden, bei der „$a = f(f(a))$“ die Rolle der Gleichung spielt. Diese Anwendung ergibt links die Formel $f(f(a)) = f(f(f(f(a))))$. Wir wenden dann die Regel (=, Subst) nochmal an, indem „$a = f(f(a))$“ jetzt die Rolle der Formel A übernimmt, während „$f(f(a)) = f(f(f(f(a))))$“ als Idnetität fungiert. Bei dieser Anwendung ersetzen wir den Term $f(f(a))$ in „$a = f(f(a))$“ durch $f(f(f(f(a))))$, und erreichen damit wiederum den Tableauabschluß:

(85)

wahr	**falsch**
$(\forall x)\, x = f(f(x))$	$(\forall x)\, x = f(f(f(f(x))))$
	[Hier nicht ebenfalls umdrehen???]
	$a = f(f(f(f(a))))$
$a = f(f(a))$	
$f(f(a)) = f(f(a))$	
$f(f(a)) = f(f(f(f(a))))$	
$a = f(f(f(f(a))))$	

Das Tableau (82) konnten wir zum Abschluß bringen, ohne von einer erweiterten Formulierung der Regel (=, Ref) Gebrauch zu machen, nach der Formeln „$t = t$“ mit komplexen Termen t unter „wahr“ eingetragen werden dürfen. Aber wir können auf diese Erweiterung nicht verzichten. Denn wie könnte sonst die logische Gültigkeit von Formeln „$t = t$“ mit komplexem t nachgewiesen werden? Betrachten wir z. B. das Tableau für das „Argument“ $\models f(a) = f(a)$:

(86)

wahr	**falsch**
	$f(a) = f(a)$

Bestünde nicht die Möglichkeit, „$f(a) = f(a)$“ (als Anwendung von (=, Ref) **[=** (59)**]**) auf der „wahr“-Seite einzutragen, so gäbe es auch keine andere Möglichkeit, das Tableau (86) zum Abschluß zu bringen, denn keine der sonstigen Konstruktionsregeln lässt sich in (86) anwenden.

Es sei noch ein Mal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Neuformulierung der Tableauregeln, nach der nicht nur Parameter, sondern beliebige geschlossene Terme verwendet werden dürfen, nur die vier oben erwähnten Regeln — (∀,W), (∃,F) (=, Subst) und (=, Ref) — betrifft. Die Quantorenregeln (∃,W) und (∀,F) sind in ihrer ursprünglichen Form zu behaupten: Nach wie vor gilt hier, daß ein neuer, „unbelasteter“ Name für die quantifizierte Variable einzusetzen ist. Dafür kommen nur neue Individuenkonstanten in Betracht. Würden wir z. B. bei der Reduktion einer Existenzformel $(\exists x) A(x)$ unter „wahr“ einen Term $f(a)$ einsetzen, so würden wir damit eine nicht gerechtfertigte Information in das Tableau einschmuggeln — und zwar auch, wenn der Parameter a bis dahin noch nicht im Tableau vorkam. Denn die Möglichkeit, ein Objekt b mit einem Term der Form $f(a)$

zu bezeichnen, besteht nur dann, wenn b zum Wertebereich der Funktion f gehört. Indem wir $f(a)$ für x in $(\exists x)A(x)t$ einsetzen, würden wir also damit implizit behaupten, daß $A(x)$ von einem Objekt im Wertebereich dieser Funktion erfüllt wird. Es ist aber im Prinzip möglich, daß die Formel $A(x)$ nur von Objekten erfüllt wird, die außerhalb des Wertebereichs von f liegen. Mit der Substitution $A(f(a))$ würde man diese Möglichkeit zu Unrecht aussschließen.

Zum Abschluß dieser Darstellung der Tableaumethode für die Prädikatenlogik mit Funktionskonstanten geben wir die Neuformulierungen der Regeln (∀,W), (∃,F), (=, Subst) und (=, Ref) in der schon erprobten diagrammatischen Form. Wie sich unmittelbar erkennen läßt, reduzieren sich diese Formulierungen auf die vorherigen, wenn die prädikatenlogische Sprache, in der das im Tableau untersuchte Argument verfaßt ist, keine Funktionskonstanten einer Stelligkeit > 0 enthält. Denn in einer solchen Sprache sind Individuenkonstanten die einzigen geschlossenen Terme.

Damit der Unterschied zwischen den Quantorenregeln (∀,W) und (∃,F) einerseits und den (unveränderten) Quantorenregeln (∀,W) und (∃,F) nochmal deutlich hervortritt, wiederholen wir auch die letzteren noch einmal.

(87)

[Neufassung von den Regeln (52) **(S. 45),** (58) **(S. 51) und** (59) **(S. 51)]**

(∀, W)

wahr	**falsch**
$(\forall v_i)A$	
$A(t/v_i)$	

(t beliebiger geschlossener Term)

(∀, F)

wahr	**falsch**
	$(\forall v_i)A$
	$A(c/v_i)$

(c neuer Parameter)

(∃, W)

wahr	**falsch**
$(\exists v_i)A$	
$A(c/v_i)$	

(c neuer Parameter)

(∃, F)

wahr	**falsch**
	$(\exists v_i)A$
	$A(t/v_i)$

(t beliebiger geschlossener Term)

Man beachte, daß die unmittelbar im Anschluß an (52) (S. 45) für (52) angegebenen *Anwendungsbedingungen* auch für (∀, W), (∀, F), (∃, W) und (∃, F) in (87) gelten!

(=, Subst)

wahr	**falsch**
$s = t$ A	
A'	

wahr	**falsch**
$s = t$	A
	A'

(s, t beliebige, geschlossene Terme; A' ergibt sich aus A durch Einsetzung von t für ein oder mehrere Vorkommen von s in A.)

(=, Ref)

wahr	**falsch**
$t = t$	

(t ein beliebiger geschlossener Term)

3. Der Sequenzenkalkül

Aus semantischer Sicht ist die Tableaumethode ein sehr natürliches Beweisverfahren. Ein Argument $A_1, \ldots, A_n \models B$ ist nach unserer semantischen Definition gültig, wenn es kein Modell gibt, in dem $A_1, \ldots, A_n$ wahr sind und B falsch. Um zu beweisen, daß das Argument gültig ist, muß also gezeigt werden, daß es kein solches Modell gibt. Die Tableaumethode tut genau das, und sie ist im Prinzip in der Lage — darin besteht die Vollständigkeit der Methode — für jedes gültige Argument einen solchen Beweis zu liefern. Auch entspricht die Methode (wie der Erfinder der Tableaumethode E. W. Beth betont hat) einer Vorgehensweise, nach der man innerhalb der Mathematik oft tatsächlich verfährt: Um festzustellen, ob eine Hypothese, die er für möglich oder wahrscheinlich hält, in der Tat stimmt, überlegt sich der Mathematiker, wie eine mathematische Struktur aussehen könnte, in der die Bedingungen erfüllt sind, aber die These nicht. Kommt er dabei zu dem Schluß, daß es eine solche Struktur nicht geben kann, dann ist damit der Beweis der Hypothese im Grunde geliefert.

Dennoch beläßt man es in der Mathematik oft nicht bei der Feststellung, daß es kein Gegenbeispiel zu einer Hypothese geben kann. Anschließend an die Feststellung wird ein „direkter“ Beweis konstruiert, der von den Bedingungen ausgeht und über eine Kette von Inferenzen schrittweise zur These führt. Diese Ableitungskette ist dann der „eigentliche Beweis“, und es sind diese „eigentlichen Beweise“, die man meist in Veröffentlichungen mathematischer Ergebnisse findet. Von einem Beweis solcher Art, der von den Prämissen ausgehend über eine Anzahl von Zwischenergebnissen zum Endergebnis voranschreitet, ist die Tableaumethode auf den ersten Blick recht weit entfernt.

Mit Beweisverfahren, die den Schluß aus den Prämissen ableiten, beschäftigt sich die Logik schon seit der Antike. Wir haben diesen Aspekt der Logik kurz gestreift, als im ersten Teil die Aristotelische Syllogismuslehre besprochen wurde. Wie wir dort sahen, kann man die Syllogismusregeln — wie z. B. die Regel, welche besagt, daß dann, wenn alle *A*s *B*s und alle *B*s *C*s sind, auch alle *A*s *C*s sind, oder die Regel von der Form: „Wenn es etwas gibt, das sowohl *A* als auch *B* ist, und wenn alle *B*s *C*s sind, dann gibt es ein *A*, das auch ein *C* ist." — kombinieren und auf diese Weise neue, komplexere Syllogismusschemata begründen. Zum Beispiel liefert die sukzessive Anwendung der beiden gerade genannten Regeln das Schema: Wenn es ein *A* gibt, das auch ein *B* ist, und wenn alle *B*s *C*s sind, und alle *C*s *D*s, dann gibt es etwas, das sowohl ein *A* als auch ein *D* ist.

Die Verkettung von Syllogismusschemata führt aber nicht sehr weit. Denn der Syllogismusformalismus ist, wie wir gesehen haben, nicht besonders ausdrucksfähig. (Er entspricht einem eher bescheidenen Fragment der monadischen Prädikatenlogik.) Die Entwicklung von anspruchsvolleren Deduktionsverfahren, die den Anforderungen der Mathematik gerecht werden, wurde erst dann möglich, als die Logik durch die Erfinder des Prädikatenkalküls Frege und Peirce eine neue Vollendung gefunden hatte. Die Deduktionsverfahren der Prädikatenlogik sind im Vergleich zur Aristotelischen Syllogismuslehre als recht jung zu betrachten. Aber nichtsdestotrotz sind sie mehr als ein halbes Jahrhundert vor der Tableaumethode entstanden. Die ersten Deduktionssysteme für die Prädikatenlogik, die wir vor allem Frege, Russell und Whitehead verdanken, stammen aus dem Ende des 19. und dem Anfang des 20. Jahrhunderts. Seitdem ist eine schillernde Vielfalt an Beweissystemen für die Prädikatenlogik entstanden, die zwar alle die Grundarchitektur eines Ableitungssystems haben, in dem man von den Prämissen ausgeht und auf den Schluß hinarbeitet, aber die sich oft dennoch wesentlich voneinander unterscheiden. Auf dem jetzt folgenden Streifzug durch die Landschaft der prädikatenlogischen Beweistheorie werden wir einige dieser Systeme kennenlernen.

Zwischen diesen Systemen und der Tableau-Methode gibt es systematische Zusammenhänge. Eine Brücke bildet der *Sequenzenkalkül*, der in den dreißiger Jahren von dem deutschen Mathematiker und Logiker Gerhard Gentzen (1909–1945) entwickelt wurde.

3.1. **Sequenzenkalkül für die Aussagenlogik.**

Ein erster Eindruck des Sequenzenkalküls läßt sich am besten an Hand eines Beispiels vermitteln. Wir betrachten ein gültiges Argument — ein recht einfaches Argument des Aussagenkalküls eignet sich zu diesem Zweck am besten — und transformieren das geschlossene Tableau für dieses Argument in eine Ableitung des Sequenzenkalküls.

(88)

$p \wedge (q \vee r) \models (p \wedge q) \vee r$

(89)

<table>
<tr><th colspan="3">wahr</th><th colspan="3">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="3">$p \wedge (q \vee r)$

p
$q \vee r$</td><td colspan="3">$(p \wedge q) \vee r$
$p \wedge q$
r</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2"></td><td rowspan="2">p</td><td colspan="2">q</td></tr>
<tr><td>q</td><td>r</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ast 1</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td><td>Ast 1</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td></tr>
</table>

Unsere Begründung, wieso der Tableau-Abschluß als Nachweis der Gültigkeit des Ausgangsarguments betrachtet werden darf, sah so aus: Das Tableau stellt eine systematische Suche nach einem Gegenbeispiel dar. Bei dieser Suche werden alle Möglichkeiten verfolgt — jeder solchen Möglichkeit entspricht ein Ast des Tableaus. Schließt sich ein Ast, so bedeutet dies, daß die von ihm repräsentierte Suche zum Widerspruch führt. Denn zum Abschluß kommt das Tableau ja nur dann, wenn dieselbe Formel sowohl unter „wahr" als auch unter „falsch" im Ast vorkommt, was besagt, daß sie in dem entsprechenden Gegenbeispiel sowohl wahr als auch falsch sein müßte; ein solches Gegenbeispiel kann es aber offensichtlich nicht geben. Sind alle Äste des Tableaus geschlossen, dann gibt es also überhaupt kein Gegenbeispiel und es darf geschlossen werden, daß das Argument gültig ist.

Man kann diese Rechtfertigung auch anders formulieren. Ein geschlossener Ast läßt sich selbst als ein Argument interpretieren, dessen Gültigkeit direkt erkennbar ist. Betrachten wir z. B. den sich in (89) ganz links befindenden Tableau-Ast 1, der sich schon gleich nach dem dritten Reduktionsschritt schließt. In diesem Ast kommen die Formeln $p \wedge (q \vee r)$, p und $q \vee r$ unter „wahr" und die Formeln $(p \wedge q) \vee r$, $p \wedge q$, r und p unter „falsch" vor.

Mit diesen zwei Formelmengen können wir das Argument assoziieren, dessen einzige Prämisse die Konjunktion der Formeln in der ersten und dessen Schluß die Disjunktion der Formeln in der zweiten Menge ist:

(90)

$(p\wedge(q\vee r))\wedge p\wedge(q\vee r)\models((p\wedge q)\vee r)\vee(p\wedge q)\vee r\vee p$

Daß dieses Argument gültig ist, erkennt man direkt daran, daß der konjunktiven Prämisse und dem disjunktiven Schluß ein Glied (nämlich: p) gemeinsam ist. Daß ein solches Argument gültig sein muß, ist klar. Denn ist M eine Bewertung, die die Prämisse wahr macht, dann macht sie insbesondere auch das Konjunkt p dieser Prämisse wahr. Damit ist dann aber der Schluß, der p als Disjunkt enthält, ebenfalls in M wahr. (91) gibt eine allgemeine Formulierung dieses Prinzips:

(91) (Axiom des Sequenzenkalküls)

Sei $A_1\wedge\ldots\wedge C\wedge\ldots\wedge A_n\models B_1\vee\ldots\vee C\vee\ldots\vee B_m$ ein Argument, dessen einzige Prämisse eine Konjunktion und dessen Schluß eine Disjunktion ist, und in dem ein und dieselbe Formel zugleich als ein Konjunkt der Prämisse und als ein Disjunkt des Schlusses auftritt. Dann ist dieses Argument gültig.

Offensichtlich ist mit jedem geschlossenen Ast eines semantischen Tableaus ein gültiges Argument von dem in (91) beschriebenen Typ assoziiert. Insbesondere ergeben die beiden anderen Äste von (89) die Argumente (92) und (93):

(92)

$(p\wedge(q\vee r))\wedge p\wedge(q\vee r)\wedge q\models((p\wedge q)\vee r)\vee(p\wedge q)\vee r\vee q$

(93)

$(p\wedge(q\vee r))\wedge p\wedge(q\vee r)\wedge r\models((p\wedge q)\vee r)\vee(p\wedge q)\vee r\vee q$

((92) ist gültig, weil q links als Konjunkt und rechts als Disjunkt auftritt. (93) ist gültig wegen der beiderseitigen Präsenz der Formel r.)

Argumente dieser Form, in der die einzige Prämisse die Form einer Konjunktion $A_1\wedge\ldots\wedge A_n$ und der Schluß die Form einer Disjunktion $B_1\vee\ldots\vee B_m$ hat, haben in den folgenden Überlegungen, sowie im Sequenzenkalkül überhaupt, einen zentralen Stellenwert. Es gibt eine besondere Notation für solche Argumente, in der die Konjunkte der Prämisse und die Disjunkte des Schlusses durch Kommata voneinander getrennt werden (statt durch $\wedge$ bzw. $\vee$). Zum Beispiel sehen (92) und (93) in dieser Notation wie folgt aus:

(94)

$p\wedge(q\vee r)\,,p,q\vee r,q\models(p\wedge q)\vee r,p\wedge q,r,q$

(95)

$p\wedge(q\vee r)\,,p,q\vee r,r\models(p\wedge q)\vee r,p\wedge q,r,q$

Ein Vorzug dieser Notation ist es, die im Rahmen des Sequenzenkalküls wichtige Symmetrie zwischen den Formeln auf der Prämissenseite und denen auf der Schlußseite besonders hervorzuheben.

Betrachten wir nun den letzten in der Konstruktion von (89) durchgeführten Reduktionsschritt, der zu den beiden Ästen führte, für die die entsprechenden Argumente in (92) und (93) bzw. (94) und (95) dargestellt sind. In diesem Schritt wurde die Formel $q\vee r$ auf der „wahr“-Seite reduziert. Auch dem Tableau-Ast, in dem dieser Reduktionsschritt durchgeführt wurde (also dem Ast 2 desjenigen Tableaus, das man *vor* dem Durchführen dieses Reduktionsschrittes hatte, oder anders ausgedrückt, dem oberen Teil von Ast 2.1 und Ast 2.2, in dem diese zusammenfallen), entspricht ein Argument, dessen Prämisse die Konjunktion der Formeln, die sich unmittelbar vor dem Reduktionsschritt in der „wahr“-Spalte befanden und dessen Schluß die Disjunktion der Formeln ist, die zu diesem Zeitpunkt auf der „falsch“-Seite vorkamen. In der neuen Notation, in der wir statt $\wedge$ und $\vee$ Kommata verwenden, hat dieses folgende Gestalt:

(96)

$p\wedge(q\vee r)\,,p,q\vee r\models(p\wedge q)\vee r,p\wedge q,r,q$

Ist (96) gültig? Die Antwort auf diese Frage ist natürlich positiv und sie läßt sich wie folgt begründen. Die Prämissenmenge von (96) besteht aus der Disjunktion $q\vee r$, die beim unmittelbar folgenden Reduktionsschritt in ihre Disjunkte zerlegt wird, sowie aus noch zwei weiteren Prämissen. Den zwei Ästen, die durch den Reduktionsschritt entstehen, entsprechen, wie soeben bemerkt, die Argumente (94) und (95). Diese unterscheiden sich von (96) dadurch, daß das Argument (94) nebst der Prämisse $q\vee r$ auch noch das erste Disjunkt q von dieser Disjunktion als Prämisse enthält, während in dem Argument (95) an gleicher Stelle das zweite Disjunkt r vorkommt. Aufgrund dieser Beziehung zwischen (96), (94) und (95) läßt sich nun leicht argumentieren, daß wenn die beiden letzteren Argumente gültig sind, auch das erste gültig sein muß. Die Überlegung hat die folgende allgemeine Form:

(97)

Um zu zeigen, daß aus einer Disjunktion $C \vee D$ und weiteren Prämissen $A_1, \dots, A_n$ der Schluß B folgt, reicht es aus, zu zeigen, daß B einerseits aus $A_1, \dots, A_n, C \vee D$ zusammen mit C und andererseits aus $A_1, \dots, A_n, C \vee D$ zusammen mit D folgt. Denn sind die beiden letzteren Argumente gültig, so muß auch das ursprüngliche Argument gültig sein. Wäre nämlich das ursprüngliche Argument nicht gültig, dann würde es ein Gegenbeispiel geben, in dem der Schluß B falsch und die Prämissen $A_1, \dots, A_n, C \vee D$ wahr sind. In einem solchen Gegenbeispiel wäre dann insbesondere $C \vee D$ wahr, und so müßte dort auch C oder D wahr sein. Im ersten Fall hätten wir dann aber ein Gegenbeispiel gegen das Argument $A_1, \dots, A_n, C \vee D, C \vDash B$, was wegen der Gültigkeit dieses Arguments ausgeschlossen ist, und im zweiten Fall hätten wir ein Gegenbeispiel gegen $A_1, \dots, A_n, C \vee D, D \vDash B$, was ebenfalls ausgeschlossen ist.

Aufgrund von (97) und der schon gemachten Beobachtung, daß (94) und (95) gültig sind, können wir schließen, daß auch (96) gültig ist.

Wir können das Prinzip (97) als eine *Inferenzregel für Gültigkeitsbehauptungen* betrachten. Die Regel läßt sich schematisch wie in (98) darstellen.

(98)

$$\frac{\boxed{A_1, \dots, A_n, C \vee D, C \vDash B_1, \dots, B_m} \qquad \boxed{A_1, \dots, A_n, C \vee D, D \vDash B_1, \dots, B_m}}{\boxed{A_1, \dots, A_n, C \vee D \vDash B_1, \dots, B_m}} \; (\vee, \mathrm{L})$$

Paraphrasieren kann man diese Regel entweder wie in (99) oder wie in (100).

(99) Wenn die Argumente $A_1, \dots, A_n, C \vee D, C \vDash B_1, \dots, B_m$ und $A_1, \dots, A_n, C \vee D, D \vDash B_1, \dots, B_m$ beide gültig sind, dann ist auch das Argument $A_1, \dots, A_n, C \vee D \vDash B_1, \dots, B_m$ gültig.

(100) Wenn man $B_1 \vee \dots \vee B_m$ aus $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge (C \vee D) \wedge C$ ableiten kann und ebenfalls $B_1 \vee \dots \vee B_m$ aus $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge (C \vee D) \wedge D$ ableiten kann, dann ist damit nachgewiesen, daß $B_1 \vee \dots \vee B_m$ auch aus $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge (C \vee D)$ ableitbar ist. Also dürfen zwei Ableitungen der beiden ersten Argumente zusammen als Ableitung des dritten Arguments betrachtet werden.

Die bisherigen Überlegungen haben uns zu dem Schluß geführt, daß die Argumente (96) und (101) (das Argument (90) in neuer Notation)

(101)

$$p \wedge (q \vee r), p, q \vee r \vDash (p \wedge q) \vee r, p \wedge q, r, p$$

beide gültig sind. Betrachten wir nun den Reduktionsschritt, der zu den beiden Tableau-Ästen führte, denen diese beiden Argumente entsprechen. Dieser Schritt reduzierte die Formel $p \wedge q$ in der „falsch“-Spalte. Dem Tableauzustand, der unmittelbar vor diesem Schritt bestand, entspricht folgendes Argument:

(102)

$$p \wedge (q \vee r), p, q \vee r \vDash (p \wedge q) \vee r, p \wedge q, r$$

Wie im letzten Fall argumentieren wir, daß dieses Argument gültig sein muß, weil die beiden Argumente (101) und (96) gültig sind. Das entsprechende Prinzip, das dieser Überlegung zugrundeliegt — „wenn aus $A_1, \dots, A_n$ einerseits die Disjunktion $B_1 \vee \dots \vee B_m \vee (C \wedge D) \vee C$ und andererseits die Disjunktion $B_1 \vee \dots \vee B_m \vee (C \wedge D) \vee D$ folgt, dann folgt auch die Disjunktion $B_1 \vee \dots \vee B_m \vee (C \wedge D)$ aus $A_1, \dots, A_n$“ — ist schematisch in (103) dargestellt.

(103)

$$\frac{\boxed{A_1, \dots, A_n \vDash B_1, \dots, B_m, C \wedge D, C} \qquad \boxed{A_1, \dots, A_n \vDash B_1, \dots, B_m, C \wedge D, D}}{\boxed{A_1, \dots, A_n \vDash B_1, \dots, B_m, C \wedge D}} \; (\wedge, \mathrm{R})$$

Da schon gezeigt wurde, daß (101) und (96) beide gültig sind, erlaubt (103) den Schluß, daß auch (102) ein gültiges Argument ist.

Dem gerade besprochenen Tableaureduktionsschritt ging der Reduktionsschritt voran, in dem die Konjunktion $p \wedge (q \vee r)$ unter „wahr“ auf ihre beiden Konjunkte p und $q \vee r$ reduziert wird. Dieser Schritt wird durch folgendes Prinzip gerechtfertigt:

> Ist ein Argument von der Form $A_1, \dots, A_n, C \wedge D, C, D \vDash B_1, \dots, B_m$ gültig, dann ist auch das Argument $A_1, \dots, A_n, C \wedge D \vDash B_1, \dots, B_m$ gültig.

In der uns schon von (98) und (103) bekannten schematischen Form sieht dieses Prinzip wie folgt aus:

(104)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\wedge D,C,D\vDash B_1,\ldots,B_m}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\wedge D\vDash B_1,\ldots,B_m}}\ (\wedge,\mathrm{L})$$

Wenden wir (104) auf das schon als gültig erkannte Argument (102) an, so ergibt sich, daß auch (105) gültig ist.

(105)

$p\wedge(q\vee r)\vDash(p\wedge q)\vee r,p\wedge q,r$

Aus der Gültigkeit von (105) läßt sich zuletzt die Gültigkeit des ursprünglichen Arguments (88) ableiten. Dazu beziehen wir uns auf den ersten Reduktionsschritt im Tableau (89), in dem die Formel $(p\wedge q)\vee r$ unter „falsch“ in ihre Disjunkte $p\wedge q$ und r zerlegt wurde. Die entsprechende Regel, die die Gültigkeit des Arguments, welches mit dem Ausgangstableau assoziiert ist, zurückführt auf die Gültigkeit des Arguments, das sich aus der Regelanwendung ergibt, ist (106):

(106)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n\vDash B_1,\ldots,B_m,C\vee D,C,D}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n\vDash B_1,\ldots,B_m,C\vee D}}\ (\vee,\mathrm{R})$$

Obwohl in (89) nicht alle Tableauregeln des Aussagenkalküls ins Spiel kommen, dürfte die detaillierte Diskussion des Beispiels doch plausibel gemacht haben, daß es für jede Tableau-Regel R ein entsprechendes Prinzip P_R des Sequenzenkalküls gibt. Genauer gesagt: Für jede Tableauregel R gibt es ein Prinzip P_R, das zu R in folgendem Verhältnis steht: Sei Z ein Tableau-Ast und sei Z' der Ast (bzw. Z' und Z'' die Äste), der sich durch Anwendung von R auf eine Formel in Z ergibt (bzw. die sich daraus ergeben); seien A und A' (bzw. A' und A''), die diesen Ästen entsprechenden Argumente. Das Prinzip P_R besagt, daß die Gültigkeit von A aus der von A' (bzw. von A' und A'') folgt.

Es ist nicht schwer, die noch fehlenden Prinzipien zu formulieren. Sie sind unter (107) – (112) aufgelistet.

(107)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n,\neg C\vDash B_1,\ldots,B_m,C}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n,\neg C\vDash B_1,\ldots,B_m}}\ (\neg,\mathrm{L})$$

(108)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\vDash B_1,\ldots,B_m,\neg C}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n\vDash B_1,\ldots,B_m,\neg C}}\ (\neg,\mathrm{R})$$

(109)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\rightarrow D\vDash B_1,\ldots,B_m,C}\quad\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\rightarrow D,D\vDash B_1,\ldots,B_m}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\rightarrow D\vDash B_1,\ldots,B_m}}\ (\rightarrow,\mathrm{L})$$

(110)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\vDash B_1,\ldots,B_m,C\rightarrow D,D}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n\vDash B_1,\ldots,B_m,C\rightarrow D}}\ (\rightarrow,\mathrm{R})$$

(111)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\leftrightarrow D,C,D\vDash B_1,\ldots,B_m}\quad\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\leftrightarrow D\vDash B_1,\ldots,B_m,C,D}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C\leftrightarrow D\vDash B_1,\ldots,B_m}}\ (\leftrightarrow,\mathrm{L})$$

(112)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,A_n,C \vDash B_1,\ldots,B_m,C \leftrightarrow D,D} \quad \boxed{A_1,\ldots,A_n,D \vDash B_1,\ldots,B_m,C \leftrightarrow D,C}}{\boxed{A_1,\ldots,A_n \vDash B_1,\ldots,B_m,C \leftrightarrow D}}\ (\leftrightarrow,\mathrm{R})$$

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt formulierten Regeln können wir nun jedes Argument der Aussagenlogik ableiten, dessen Gültigkeit sich mit der Tableaumethode nachweisen läßt — und damit, wegen der Vollständigkeit der Tableaumethode, jedes gültige Argument überhaupt.

Wir haben am obigen Beispiel gesehen, wie die Regeln des Sequenzenkalküls es uns ermöglichen, aus einem abgeschlossenen Tableau die Gültigkeit des Ausgangsarguments formal nachzuweisen. Wir können einen solchen Nachweis in die Form einer richtigen Ableitung des Arguments bringen, die von einer Anzahl von direkt als gültig erkennbaren Argumenten (den „Axiomen" des Sequenzenkalküls) ausgeht und durch verkettete Anwendung von Regeln des Sequenzenkalküls zuletzt zum Argument gelangt, dessen Gültigkeit nachzuweisen war. Dazu wird meist eine baumartige graphische Darstellung verwendet; als Beispiel geben wir hier die Ableitung im Sequenzenkalkül von dem oben diskutierten Argument (88).

(113)

$$\frac{\overset{(\mathrm{Ax.})}{\boxed{p\wedge(q\vee r),\ p,\ q\vee r,\ q \vDash (p\wedge q)\vee r,\ p\wedge q,\ r,\ q}} \quad \overset{(\mathrm{Ax.})}{\boxed{p\wedge(q\vee r),\ p,\ q\vee r,\ r \vDash (p\wedge q)\vee r,\ p\wedge q,\ r,\ q}}}{(*)\quad \boxed{p\wedge(q\vee r),\ p,\ q\vee r \vDash (p\wedge q)\vee r,\ p\wedge q,\ r,\ q}}\ (\vee,\mathrm{L})$$

$$\frac{\frac{\frac{\boxed{p\wedge(q\vee r),\ p,\ q\vee r \vDash (p\wedge q)\vee r,\ p\wedge q,\ r,\ p}\quad (*)}{\boxed{p\wedge(q\vee r),\ p,\ q\vee r \vDash (p\wedge q)\vee r,\ p\wedge q,\ r}}\ (\wedge,\mathrm{R})}{\boxed{p\wedge(q\vee r),\ p,\ q\vee r \vDash (p\wedge q)\vee r}}\ (\vee,\mathrm{R})}{\boxed{p\wedge(q\vee r) \vDash (p\wedge q)\vee r}}\ (\wedge,\mathrm{L})$$

3.2. **Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik.**

Der Sequenzenkalkül läßt sich ohne große Probleme auf die Prädikatenlogik erweitern. Die Erweiterung involviert Prinzipien, die sich ähnlich aus den Tableauregeln für die Quantoren (und für die Identität) herleiten lassen wie die Prinzipien des Aussagenkalküls aus den Tableau-Regeln für die Junktoren. Wiederum läßt sich der Zusammenhang zwischen Regeln und Prinzipien am leichtesten an einem Beispiel erläutern.

Wie wir gesehen haben, ist das Argument

(114)

(=(12), S. 14)

$$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y))) \vDash (\forall x)\,(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$$

gültig. Das entsprechende Tableau (=(21), S. 19) wiederholen wir in (115):

(115)

<table>
<tr><th colspan="3">wahr</th><th colspan="3">falsch</th></tr>
<tr><td colspan="3">$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,y)))$
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$
$Q(a)$
$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$
$P(b)$</td><td colspan="3">$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$
$P(b) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$
$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$
$Q(a) \wedge R(b,a)$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$P(b) \rightarrow R(b,a)$</td><td>$Q(a)$</td><td colspan="2">$R(b,a)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$R(b,a)$</td><td></td><td>$P(b)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Ast 1</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td><td>Ast 1</td><td>Ast 2.1</td><td>Ast 2.2</td></tr>
</table>

Zur Rechtfertigung der Behauptung, daß das Argument (114) gültig ist, arbeiten wir uns wiederum hoch, ausgehend von den trivial gültigen Argumenten, die den geschlossenen Tableau-Ästen von (115) entsprechen. Dabei schenken wir uns diesmal die Schritte, die mit der Reduktion von aussagenlogischen Junktoren zu tun haben und beschränken uns auf diejenigen, die sich auf die Quantoren beziehen. Der erste Schritt dieser Art, den wir zu berücksichtigen haben (das ist also der, welcher in der Tableaukonstruktion als letzter durchgeführt wurde), betrifft die Reduktion der Formel $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$ unter „wahr". In diesem Schritt wurde der Quantor $(\forall x)$ mit dem Parameter b instanziiert. Das Argument, das dem Resultat dieser Anwendung entspricht, findet sich in (116), das Argument, das mit dem Tableau-Ast assoziiert ist, aus dem dieses Resultat hervorging, in (117).

(116)

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$P(b) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,	$\models$	$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$,
$P(b)$,		$R(b,a)$
$P(b) \rightarrow R(b,a)$		

(117)

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$P(b) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,	$\models$	$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$,
$P(b)$		$R(b,a)$

(N.B.: Der einzige Unterschied zwischen (116) und (117) besteht darin, daß in (116) die zusätzliche Prämisse $P(b) \rightarrow R(b,a)$ vorkommt!)

Wir müssen zeigen, daß die Gültigkeit von (117) aus der von (116) folgt. Intuitiv sollte klar sein, daß dies so sein muß. Denn ist $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$ wahr, dann muß auch $P(b) \rightarrow R(b,a)$ wahr sein. Gäbe es also ein Gegenbeispiel zu (117), so wäre dies ebenfalls ein Gegenbeispiel zu (116). Also folgt die Gültigkeit von (117) aus der Gültigkeit von (116). (118) gibt die entsprechende Regel des Sequenzenkalküls an.

(118)

$$\frac{\boxed{A_1,\ldots,(\forall v_i)A, A(t/v_i),\ldots,A_n \models B_1,\ldots,B_m}}{\boxed{A_1,\ldots,(\forall v_i)A,\ldots,A_n \models B_1,\ldots,B_m}}\ (\forall, \mathrm{L})$$

(Hier ist wiederum t ein beliebiger geschlossener Term.)

Der nächste Schritt betrifft die Reduktion der sich in der „falsch"-Spalte befindenden Formel $(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$. Die Argumente, die mit dem betreffenden Tableau-Ast vor und nach dem Reduktionsschritt assoziiert sind, sind in (119) (nach der Reduktion) und (120) (vor der Reduktion) aufgeführt.

(119)

$(\exists y)$ $(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$,
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$,	$\vDash$	$P\,(b) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$,
$Q\,(a)$,		$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$,
$(\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$,		$Q\,(a) \wedge R\,(b,a)$
$P\,(b)$		

(120)

$(\exists y)$ $(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$,
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$,	$\vDash$	$P\,(b) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$,
$Q\,(a)$,		$(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$
$(\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$,		
$P\,(b)$		

Die Gültigkeit von (120) folgt aus der Gültigkeit von (119) fast genauso, wie sich die Gültigkeit von (117) aus der von (116) ergibt. Gäbe es ein Gegenbeispiel zu (120), dann würde dieses alle Formeln auf der rechten Seite falsifizieren. Dann wäre also insbesondere $(\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$ falsch. Das aber impliziert, daß auch $(Q\,(a) \wedge R\,(b,a))$ falsch wäre, und damit hätten wir also auch ein Gegenbeipiel zu (119). Das einschlägige Prinzip ist (121)[5].

[5]Von jetzt an verwenden wir in den schematischen Darstellungen von Prinzipien des Sequenzenkalküls den griechischen Großbuchstaben Γ zur Bezeichnung der Formelmenge $\{A_1,\ldots,A_n\}$ und den Buchstaben Δ zur Bezeichnung von $\{B_1,\ldots,B_m\}$.

(121)

$$\frac{\boxed{\Gamma \vDash \Delta, (\exists v_i)\,A, A\,(t/v_i)}}{\boxed{\Gamma \vDash \Delta, (\exists v_i)\,A}}\ (\exists,\ \mathrm{R})$$

(t ein beliebiger geschlossener Term)

Der nächste für uns relevante Schritt ist der, in dem die all-quantifizierte Formel $(\forall x)\,(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$ unter „falsch" mit dem neuen Parameter b instanziiert wird. Die Argumente, die dem Tableau nach und vor diesem Schritt entsprechen, sind die in (122) und (123).

(122)

$(\exists y)$ $(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$,
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$,	$\vDash$	$P\,(b) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(b,y))$
$Q\,(a)$,		
$(\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$		

(123)

$(\exists y)$ $(Q\,(y) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,y)))$,		
$Q\,(a) \wedge (\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$,	$\vDash$	$(\forall x)$ $(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$
$Q\,(a)$,		
$(\forall x)\,(P\,(x) \to R\,(x,a))$		

In diesem Fall ist die Rechtfertigung etwas komplizierter. Nehmen wir an, (122) sei gültig. Wäre (123) nicht gültig, dann gäbe es ein Gegenbeispiel zu diesem Argument, d. h. ein Modell M, in dem die Prämissen von (123) wahr sind und der Schluß — also die Formel $(\forall x)\,(P\,(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$ — falsch. Wir können dabei annehmen, daß M ein Modell für die Sprache L ist, die nur aus den nicht-logischen Konstanten besteht, die in (123) vorkommen. Aus dem Falsch-Sein von $(\forall x)\,(P(x) \to (\exists y)\,(Q\,(y) \wedge R\,(x,y)))$ folgt, daß das Universum von M ein Individuum d enthalten muß, das die Formel $P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y))$ nicht erfüllt — also, daß $P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y))$

in M wahr ist, wenn x mit d belegt wird. Da b ein neuer Parameter war und somit nicht zu L gehört, können wir nun M zu einem Modell M' für die Sprache $L \dot\cup \{b\}$ expandieren, in dem b das Individuum d bezeichnet. (Ansonsten ist M' genau wie M!) Es ist leicht einzusehen, daß in M' — genau wie in M — die Formel $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$ falsch und die Prämissen von (119) wahr sind. Überdies falsifiziert M' die Formel $P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$ wegen der Entscheidung, die wir bezüglich der Interpretation von b getroffen haben. Also wäre M' ein Gegenbeispiel zu (122) — entgegen unserer Annahme.

Auch dieser Überlegung entspricht ein Prinzip des Sequenzenkalküls — und zwar (124).

(124)

$$\frac{\boxed{\Gamma \models \Delta, (\forall v_i)A, A(\alpha/v_i)}}{\boxed{\Gamma \models \Delta, (\forall v_i)A}}\ (\forall, \mathrm{R})$$

(Hier muß α ein Parameter sein, der in keiner der Formeln des Arguments unterhalb des waagerechten Striches vorkommt.)

Der letzte hier zu betrachtende Reduktionsschritt ist der, in dem die Formel $(\exists y)(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$ links von $\models$ mit dem Parameter a instanziiert wurde. Die Argumente vor und nach der Regelanwendung sind die in (125) und (126). (Weil der jetzt betrachtete Schritt der erste in der Tableaukonstruktion war, ist das zweite dieser Argumente das ursprüngliche Argument (114), dessen Gültigkeit nachzuweisen war.)

(125)

$$\boxed{\begin{array}{l} (\exists y) \\ (Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y))), \\ \hline Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a)) \end{array}} \models \boxed{\begin{array}{l} (\forall x) \\ (P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y))) \end{array}}$$

(126)

$$\boxed{\begin{array}{l} (\exists y) \\ (Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y))) \end{array}} \models \boxed{\begin{array}{l} (\forall x) \\ (P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y))) \end{array}}$$

Die Argumentation, daß die Gültigkeit von (125) die von (126) nach sich zieht, ist ähnlich wie im soeben diskutierten Fall: Ein Modell M, das die Prämisse von (126) wahr und seinen Schluß falsch macht, wird ein Individuum d enthalten, das die Formel $Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y))$ erfüllt (jetzt mit d als Belegung für y). Wiederum können wir dann M zu M' expandieren, indem wir a als Namen von d interpretieren. M' wird dann auch $Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$ verifizieren. Die entsprechende Sequenzenkalkülregel ist (127).

(127)

$$\frac{\boxed{\Gamma, (\exists v_i)A, A(\alpha/v_i) \models \Delta}}{\boxed{\Gamma, (\exists v_i)A \models \Delta}}\ (\exists, \mathrm{L})$$

(Hier muß α ein Parameter sein, der in keiner der Formeln des Arguments unterhalb des waagerechten Striches vorkommt.)

Genauso wie für das aussagenlogische Beispiel (88) können wir den so erbrachten Beweis der Gültigkeit von (114) in der Form einer Ableitung im Sequenzenkalkül darstellen (vgl. (112)):

(128)

$$\frac{\begin{array}{cc} \text{(128 — 1):} & \text{(128 — 2):} \\ \dfrac{\boxed{P(b) \models P(b)}}{\text{(128 — 3)}} & \dfrac{\boxed{R(b,a) \models R(b,a)}}{\text{(128 — 4)}} \end{array}}{\text{(128 — 5)}}\ (\to, \mathrm{L})$$

(Ausführung von (128 — 3), (128 — 4) und (128 — 5) auf den nächsten Seiten, Fortsetzung der Ableitung auf S. 94!)

(128 — 3):

$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,y)))$,		$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$P(b) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,	$\models$	$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$,
$P(b)$,		$R(b,a)$,
$P(b) \rightarrow R(b,a)$		$P(b)$

(128 — 4):

$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,y)))$,		
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a)$,		$P(b) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,	$\models$	$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$P(b)$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$,
$P(b) \rightarrow R(b,a)$,		$R(b,a)$
$R(b,a)$		

(128 — 5) [= (116)]:

$(\exists y)\,(Q(y) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,y)))$,		$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$P(b) \rightarrow (\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,	$\models$	$(\exists y)\,(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$,
$P(b)$,		$R(b,a)$
$P(b) \rightarrow R(b,a)$		

Ausführung der auf der nächsten Seite bei der Fortsetzung der Ableitung (128) verwendeten Bezeichnungen:

(128 — 6):

$\boxed{Q(a) \vDash Q(a)}$

(128 — 7):

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		$P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,	$\vDash$	$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$,
$P(b)$		$Q(a)$

(128 — 8) [= (117)]:

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		$P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,	$\vDash$	$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$,
$P(b)$		$R(b,a)$

$$\dfrac{\dfrac{(128\text{ — }6)}{(128\text{ — }7)} \qquad \dfrac{(128\text{ — }5)\quad [=(116)]}{(128\text{ — }8)\quad [=(117)]}\,(\forall, \mathrm{L})}{}\,(\wedge, \mathrm{R})$$

(128 — 9) [= (119)]:

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		$P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,	$\vDash$	$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$(\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		$Q(a) \wedge R(b,a)$
$P(b)$		

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,(\exists, \mathrm{R})$$

(128 — 10) [= (120)]:

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$,		$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,	$\vDash$	$P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$,
$Q(a)$,		$(\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$
$(\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		
$P(b)$		

(Fortsetzung auf nächster Seite!)

(128 — 10)

———————————————————— (→, R)

(128 — 11) [= (122)]:

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$,	$\vDash$	$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$,
$Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$,		$P(b) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(b,y))$
$Q(a)$,		
$(\forall x)(P(x) \to R(x,a))$		

———————————————————— (∀, R)

(128 — 12) [= (123)]:

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$,	$\vDash$	$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$
$Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$		
$Q(a)$,		
$(\forall x)(P(x) \to R(x,a))$		

———————————————————— (∧, L)

(128 — 13) [= (125)]:

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$,	$\vDash$	$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$
$Q(a) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,a))$		

(Fortsetzung auf nächster Seite!)

(128 — 13) [= (125)]

———————————————————— (∃, L)

(128 — 14) [= (126) = (114)]:

$(\exists y)$ $(Q(y) \wedge (\forall x)(P(x) \to R(x,y)))$	$\vDash$	$(\forall x)$ $(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y)))$

Nach diesen in Einzelheiten behandelten Beispielen werden wir auf eine Diskussion der Sequenzenkalkülregeln für die Identität verzichten. Die Regeln sind in (129) und (130) dargestellt. Anschließend werden wir den Gültigkeitsnachweis im Sequenzenkalkül für ein einfaches Argument vorführen, dessen Gültigkeit zum Teil auf den logischen Eigenschaften der Identität beruht. Wie in den vorher diskutierten Beispielen dieses Abschnitts konstruieren wir zuerst das semantische Tableau für das Argument und leiten dann aus diesem (geschlossenen) Tableau den Gültigkeitsbeweis im Sequenzenkalkül ab.

(129)

$$\frac{\boxed{\Gamma, A, t = t', A(t/t') \vDash \Delta}}{\boxed{\Gamma, A, t = t' \vDash \Delta}} \quad (=, \text{Sub}, \text{L})$$

$$\frac{\boxed{\Gamma, t = t' \vDash \Delta, A, A(t/t')}}{\boxed{\Gamma, t = t' \vDash \Delta, A}} \quad (=, \text{Sub}, \text{R})$$

(Hier bezeichnet $A(t/t')$ das Resultat der Ersetzung mindestens eines Vorkommens von t in A durch t'.)

(130)

$$\dfrac{\boxed{\Gamma, t = t \vDash \Delta}}{\boxed{\Gamma \vDash \Delta}}\ (=,\text{Ref})$$

Betrachten wir nun folgendes Argument:

(131)

$P(a), Q(b), a = b \vDash (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

(132) gibt das entsprechende Tableau an:

(132)

wahr		**falsch**	
$P(a)$ $Q(b)$ $a = b$ $Q(a)$		$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ $P(a) \wedge Q(a)$	
		$P(a)$	$Q(a)$
Ast 1	**Ast 2**	**Ast 1**	**Ast 2**

Dieses Tableau läßt sich wie folgt in eine Ableitung des Sequenzenkalküls transformieren:

(133)

$$\dfrac{\boxed{P(a) \vDash P(a)}}{\boxed{P(a),\ Q(b),\ a = b,\ Q(a) \vDash (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)),\ P(a) \wedge Q(a),\ P(a)}} \qquad \dfrac{\boxed{Q(a) \vDash Q(a)}}{\boxed{P(a),\ Q(b),\ a = b,\ Q(a) \vDash (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)),\ P(a) \wedge Q(a),\ Q(a)}}$$

$$\dfrac{}{\boxed{P(a),\ Q(b),\ a = b,\ Q(a) \vDash (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)),\ P(a) \wedge Q(a)}}\ (\wedge,\text{R})$$

$$\dfrac{}{\boxed{P(a),\ Q(b),\ a = b \vDash (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)),\ P(a) \wedge Q(a)}}\ (=,\text{Sub, L})$$

$$\dfrac{}{\boxed{P(a),\ Q(b),\ a = b \vDash (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))}}\ (\exists,\text{R})$$

Ableitungen von Argumenten, in denen außer der Identität auch Funktionskonstanten vorkommen, gibt es in den Übungen zu diesem Kapitel. Ein solches Argument wird dort ausführlich diskutiert.

Damit beschließen wir den Abschnitt über den Sequenzenkalkül. Wie schon am Anfang des Abschintts erwähnt wurde, dient der Kalkül für uns nur als Übergang zu den Deduktionssystemen, die in den nächsten beiden

Abschnitten vorgestellt werden. Insbesondere gibt es eine enge Beziehung zwischen dem Sequenzenkalkül und dem System der Natürlichen Deduktion im nun folgenden Abschnitt. Gentzen, der beide Systeme entwickelte, und der ihnen auch die Namen gab, die wir heute noch verwenden, betrachtete die Natürliche Deduktion als eine Realitäts-nahe Formalisierung der Verfahren, die in der Mathematik und auch in anderen Zusammenhängen beim Schließen eingesetzt werden. Den Sequenzenkalkül benötigte er für theoretische Zwecke. Er ist das Ergebnis einer formalen Analyse der Regeln und Prinzipien, auf denen das System der Natúrlichen Deduktion basiert. Wir werden auf die Beziehung zwischen der Natúrlichen Deduktion und dem Sequenzenkalkül am Ende des nächsten Abschnitts kurz eingehen.

LITERATUR

Beth, E. W. (1961). *Formal Methods*. Reidel.